МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕЦ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ НИТЯМИ ОДНОСТОРОННЕГО ДЕЙСТВИЯ

В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН

Аннотация. В работе рассматривается задача устойчивости кольца, подкрепленного нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий. Решение проблемы сводится к нахождению точек бифуркации решения некоторой задачи вариационного исчисления при наличии ограничений в виде неравенств. В отличие от классического случая отыскание точек бифуркации гладких функций наличие нежестких ограничений приводит к задаче идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах. Последняя сводится к исследованию решения некоторой невыпуклой задачи математического программирования.
Ключевые слова: устойчивость, критическая нагрузка, кольцо, вариационная задача, нерастяжимые нити, арка, точки бифуркации.

Введение

Расчет на устойчивость становится все более важным в механико-математических исследованиях, так как разрушение конструкций часто связано с общей потерей устойчивости. Актуальной является задача об устойчивости упругих систем, подкрепленных тонкими нитями одностороннего действия, которые не выдерживают сжимающих усилий [1]. Использование такого подкрепления зачастую связано с необходимостью снижения веса конструкций, что является актуальным в машиностроении.

1. Постановка задачи

Пусть криволинейный стержень представляет собой кольцо радиуса R. Главные оси инерции поперечного сечения направлены по осям x, y, причем x направлена к центру кольца, y перпендикулярно его плоскости, ось z по касательной к кольцу. Обозначим перемещения точек кольца вдоль осей x, z, y через u, w, v соответственно. Декартовы координаты деформированного кольца описываются уравнениями

$$\begin{cases} \xi = (R-u)\cos\varphi - w\sin\varphi, \\ \eta = (R-u)\sin\varphi + w\cos\varphi, \varphi \in [0, 2\pi], \\ \zeta = v. \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, что в результате деформации главные оси инерции перешли в x^*, y^* и z в касательный вектор z^*. Направления (x, y, z) переходят в векторы (x^*, y^*, z^*) путем поворота на малые углы (α, β, γ), которые связаны с перемещениями формулами

$$\alpha = -\frac{1}{R}v', \;\; \beta = \frac{1}{R}\left(\frac{du}{d\varphi} + w\right), \;\; w' = u.$$

Последнее равенство — это условие несжимаемости стержня. Деформация кольца характеризуется величинами [2]:

$$\begin{cases} \delta p = \dfrac{1}{R}\left(\alpha' + \gamma\right) = -\dfrac{1}{R^2} v'' + \dfrac{1}{R}\gamma, \\ \delta q = \dfrac{1}{R^2}\beta' = \dfrac{1}{R^2}(u'' + u), \\ \delta r = \dfrac{1}{R}\left(\gamma' + \dfrac{1}{R} v'\right). \end{cases} \tag{2}$$

Упругая энергия кольца в квадратичном приближении определяется функционалом

$$U = \int_0^{2\pi} \left(\frac{B}{2R^3}(u'' + u)^2 + \frac{A}{2R^2}(\gamma - \frac{1}{R}v'')^2 + \frac{C}{2R^2}(\gamma' + \frac{1}{R}v')^2 \right) d\varphi.$$

Здесь A, B — жесткости на изгиб, C — жесткость на кручение. В случае эллиптического сечения с полуосями a и b жесткости определяются формулами

$$A = E\frac{\pi}{4}a^3 b, B = E\frac{\pi}{4}ab^3, C = E\frac{\pi a^3 b^3}{(1+\nu)(a^2+b^2)},$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Предположим, что кольцо нагружено давлением P, направленным все время к неподвижному центру кольца. Тогда работа внешних сил может быть вычислена по формуле

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(u'^2 - 2u^2 + v'^2 - v^2 \right) d\varphi.$$

В положении равновесия полная энергия $J = U - PW$ принимает минимальное (стационарное) значение. Нетрудно увидеть, что поиск критической нагрузки сводится к решению задачи изопериметрического типа

$$\begin{cases} U \to \min\limits_{u,v,\gamma}, \\ W = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Подставляя в (3) ряды Фурье, получаем набор значений давления P, при которых возможна нетривиальная форма равновесия.

В случае плоской деформации минимальная критическая сила равна $P_{kp_1} = \dfrac{4,5B}{R^3}$, при пространственной деформации $P_{kp_2} = \dfrac{12A}{(4 + A/C)R^3}$. Пусть $a = b = 1$. Можно считать, что $E = 1$, $R = 1$. Тогда из формул для плоской деформации следует, что $P_{kp_1} = 3.534$, $P_{kp_2} = 2.022$. А при значениях параметров $a = 0.5$, $b = 1$ находим $P_{kp_1} = 1.767$, $P_{kp_2} = 0.268$. Ясно, что при малых значениях а наименьшему значению критической силы соответствует величина давления при пространственной форме потери устойчивости.

Предположим, что кольцо подкреплено тросами, один конец которых закреплен к некоторой точке на кольце, а другой — к точке с координатами

$$\xi = 0, \eta = 0, \zeta = \pm c_0.$$

Тросы не выдерживают сжимающих усилий, поэтому расстояние между точками прикрепления не может увеличиваться. Обозначим M — число тросов. Расстояние между точками прикрепления j-го троса с учетом (1) определяется формулой

$$f(u, w, v) = \sqrt{\xi_j^{\ 2} + \eta_j^{\ 2} + (v \pm c_0)^2} = \sqrt{R^2 - 2Ru_j + u_j^{\ 2} + w_j^{\ 2} + v_j^{\ 2} \pm 2v_j c_0 + c_0^{\ 2}}.$$

Раскладывая в ряд Тейлора изменение расстояния с точностью до членов второго порядка малости, получим:

$$f(u,w,v)-f(0,0,0)=-\frac{Ru\pm c_0 v}{\sqrt{R^2+c_0{}^2}}.$$

Таким образом, нахождение критического давления при наличии подкрепляющих тросов сводится к задаче изопериметрического типа (3) с учетом неравенства

$$-Ru_j \pm c_0 v \le 0. \tag{4}$$

2. Алгоритм решения

Задача (3)–(4) решается методом последовательных приближений [3, 4]. Для того, чтобы исключить перемещение кольца как жесткого целого потребуем выполнение равенств

$$\int_0^{2\pi} u(\varphi)\sin\varphi d\varphi=0,\ \int_0^{2\pi} w(\varphi)\cos\varphi d\varphi=0,\ \int_0^{2\pi} v(\varphi)d\varphi=0,\ \int_0^{2\pi} w(\varphi)d\varphi=0. \tag{5}$$

Аппроксимируем функции u,w,v,γ интерполяционными кубическими сплайнами [5], принимая коэффициенты сплайнов равными

$$z_i=u_i=u(\varphi_i),\ z_{i+n}=w_i=w(\varphi_i),\ z_{i+2n}=v_i=v(\varphi_i),\ z_{i+3n}=\gamma_i=\gamma(\varphi_i),\ i\in 1:n, z\in R^m, m=4n.$$

После подстановки сплайнов $S(z,\varphi)$ в (3)–(4) получаем две квадратичные формы

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(Qz,z\right),\ g(z)=\frac{1}{2}\left(Gz,z\right)$$

и некоторый конус в R^{4n}, определяемый неравенствами (3) и уравнениями (5). Условие несжимаемости $w'=u$ учитывается методом штрафных функций путем добавления к функционалу U слагаемого вида $c\int_0^{2\pi}\left(u-w'\right)^2 d\varphi$, где c — достаточно большое число, подбирается экспериментально. Таким образом, вместо задачи (3)–(5) приходим к задаче нелинейного программирования

$$\begin{cases} f(z)\to \min\limits_{z\in\Gamma}, \\ \quad g(z)=1. \end{cases} \tag{6}$$

В ограничения (4) введем параметры k_0 и k_1:

$$-Rk_0 u \pm c_0 k_1 v \le 0. \tag{7}$$

С помощью этих параметров можно учитывать ограничения на перемещения u,w: если $k_0=0$, то считаем, что на нормальное перемещение нет никаких ограничений. Заметим, что если $c_0=0$, то имеем ограничения только на нормальное перемещение. Для численного решения задачи (6)–(7) применялся также метод последовательных приближений: пусть $z_0\in\Gamma$, $g(z_0)=1$ некоторое начальное приближение. Пусть уже получена точка $z_k\in\Gamma$, $g(z_k)=1$. В точке z_{k+1} введем в рассмотрение множество $M(z_k)=\{z\in\Gamma\,|\,Q(z-z_k)=0\}$. И решим задачу

$$f(z)\to \min_{z\in M(z_k)} \tag{8}$$

Пусть $\tilde{z}_{k+1}$ — решение задачи (8). Полагаем $z_{k+1}=\dfrac{z_{k+1}}{\sqrt{g(\tilde{z}_{k+1})}}$. Очевидно, что $g(z_{k+1})=1$. Можно показать, что любая предельная точка последовательности $\{z_k\}$ является стационарной для задачи (6), то есть удовлетворяет необходимым условиям экстремума. Заметим, что вспомогательная задача (8) является задачей выпуклого квадратичного программирования и может быть решена за конечное число арифметических вычислений.

3. Результаты численных экспериментов

Не ограничивая общности, можно положить $R = 1$, $E = 1$. Таким образом, варьируемыми параметрами являются полуоси эллиптического сечения стержня a и b. Обозначим $P_1 = \frac{4.5B}{R^3}$, $P_2 = \frac{12A}{(4 + A/C)R^3}$. В вычислениях полагали $n = 144$, $m = 576$, то есть $z \in R^{576}$.

Число нитей (тросиков), которые определяют ограничения — неравенства, в расчетах равно 36. Ниже приведена табл. 1 основных результатов.

Таблица 1

a	b	k_0	k_1	c_0	$f(z)$	$\max u_i$	$\max v_i$
1	1	1	1	0.05	3.008	0.026	0.461
1	1	1	1	0.1	5.262	0.046	0.462
1	1	0	1	0.05	3.677	0.564	$2.6*10^{-4}$
1	1	1	0	0.1	2.251	$2.8*10^{-6}$	0.460
3	1	1	1	0.05	104.22	0.156	$1.4*10^{-4}$
0.75	1	1	1	0.05	1.825	0.023	0.462
0.75	1	0	1	0.1	4.011	0.047	0.467

В табл. 1:
a, b — полуоси эллипса;
k_0, k_1, c_0 — параметры из (7);
$f(z)$ — оптимальное решение (6);
$\max u_i$, $\max v_i$ — максимальные значения соответствующих перемещений.

Без учета ограничений на перемещения происходит либо плоская потеря устойчивости кольца $(v \equiv 0)$, либо пространственная $(u \equiv 0, w \equiv 0)$. Значения критических сил в задаче без ограничений-неравенств при некоторых значения полуосей эллипса приведены ниже:

$P_{kp_1} = 3.534$, $P_{kp_2} = 2.022$ при $a = b = 1$;

$P_{kp_1} = 2.651$, $P_{kp_2} = 0.882$ при $a = 0.75, b = 1$;

$P_{kp_1} = 10.091$, $P_{kp_2} = 35.092$ при $a = 3, b = 1$.

Сравнивая значения критической нагрузки с $f(z)$, приведенным в табл. 1, видим, что подкрепление кольца тросиками может значительно увеличить критическую нагрузку, например, в 6 раз при $a = 0.5$, $b = 1$ $P_{kp} = 1.761$, $\min\{P_1, P_2\} = 0.268$.

Заключение

Численные эксперименты показали, что наличие ограничений на перемещения точек кольца может в несколько раз увеличить значение критического давления. Интересной особенностью данной задачи является то, что при ее рассмотрении приходится исследовать на бифуркацию решение задачи нелинейного квадратичного программирования при наличии ограничений в виде неравенств.

Литература

1. *Андрюкова В. Ю., Тарасов В. Н.* Nonsmooth problem of Stability for Elastic Rings // Abstracts of the international conference «Constructive nonsmooth analysis and related topics». 2017. – Part I. – Saint Petersburg, – P. 213–218.

2. *Николаи Е. Л.* Труды по механике. – Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 584 с.

3. *Тарасов В. Н.* Об устойчивости подкрепленных арок / В. Н. Тарасов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 202–214.

4. *Андрюкова В. Ю.* Некоторые конструктивно-нелинейные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения / В. Ю. Андрюкова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 412–422.
5. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – Москва : Наука, 1980. – 352 с.

УДК 539.374

О ВАРИАНТАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

М. А. Артемов, А. А. Верлин, Р. Г. Меджидов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются разные варианты математического моделирования тонкого вращающегося диска постоянной толщины в рамках приближения плоского напряженного состояния. Считается, что материал диска однородный, изотропный, проявляет упругие и пластические свойства. Принимается гипотеза о естественном состоянии. Рассматриваются кусочно-линейные и гладкие функции пластичности. Упругие свойства материала определяются линейным законом Гука. Пластические деформации и напряжения связаны ассоциированным законом пластического деформирования. При рассмотрении гладких функций пластичности выбирается условие пластичности Поля. Показано, что чем точнее кривая пластичности Поля аппроксимирует шестиугольник Треска, тем больше значения градиента вектора перемещений в малой окрестности центра диска. Приводятся графики распределения напряжений, деформаций, перемещений, а также годограф вектора напряжений для разных вариантов выбираемых определяющих уравнений. Дается сравнение полученных результатов с результатами других авторов рассматриваемой задачи.
Ключевые слова: вращающиеся диски, плоское напряженное состояние, условие пластичности Поля, условие Мизеса, условие Треска, ассоциированный закон пластического деформирования, эквивалентная деформация, эквивалентное напряжение, годограф вектора напряжений, кусочно-линейные функции пластичности, гладкие функции пластичности, малые деформации, идеальное упругопластическое тело, упрочнение, математическое моделирование.

Введение

Задача об упругом и упругопластическом состоянии тонкого вращающегося диска рассматривалась многими авторами. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что вращающиеся диски являются важными элементами многих конструкций и машин. Результаты математического моделирования вращающихся дисков содержатся в ряде монографий и учебниках, а также в многочисленных научных статьях, например, [1-6]. Большая часть научных работ, относящихся к рассматриваемой задаче, связана с рассмотрением условия пластичности Мизеса и условием пластичности Треска. Условие пластичности Треска, а также другие условия пластичности с кусочно-линейными функциями пластичности позволяют получить аналитические решения для искомых величин. Выбор гладких функций пластичности приводит к необходимости численного решения. Так, для условия пластичности Мизеса и некоторых других условий пластичности с гладкими функциями пластичности, используется прием параметрического представления кривой пластичности [1, 4, 7–10]. В работе [11] в рамках деформационной теории для нелинейных условий пластичности методом малого параметра было получено приближенное распределение напряжений и деформаций в быстро вращающемся диске из изотропного упругопластического упрочняющегося материала. В работе [12] рассматривался вопрос о появлении пластических областей во вращающемся диске для кусочно-линейных и гладких функций пластичности. В [13] показано, что для критерия текучести Шмидта — Ишлинского все деформации в центре диска достигают конечных значений. В [14–16] рассматривались диски переменной толщины. В [17] рассматривался диск с экспоненциальным изменением толщины из несжимаемого материла для случая конечных деформаций. В ряде работ рассматриваются задачи о вращающемся диске, когда учитываются не только упругие и пластические свойства материала. Так, например, в работе [18] моделируется деформирование диска, вращающегося с изменяющейся скоростью, с учетом изменения упругопластических деформаций и деформаций ползучести. В [19] был предложен общий алгоритм решения задачи о быстро вращающемся диске для любой гладкой функции пластичности.

Особенностью плоского напряженного состояния, в отличии от плоского деформированного состояния [20], для идеального пластического тела является то, что для плоского деформированного состояния, при реализации сингулярных режимов, в пространстве главных напряжений вектор напряжений может перемещаться по ребру поверхности пластичности, а для плоского напряженного состояния этого нет.

Задачи о плоском напряженном и плоском деформированном состояниях относят к общей плоской задаче [21]. Отмечается, что задача плоского напряженного состояния не может рассматриваться как частный случай трехмерной задачи. Для общей плоской задачи, когда функция текучести $F(\sigma_1, \sigma_2)$ используется в качестве пластического потенциала принимается, что $\partial F / \partial \sigma_1 + \partial F / \partial \sigma_2 = 0.$ В [22] отмечается, что соотношения общей плоской задачи можно рассматривать, как частный случай пространственной задачи, однако, некоторые предположения общей плоской задачи являются противоречивыми.

При рассмотрении плоского напряженного состояния оперируем осредненными по толщине диска величинами [23]. Для формул Коши средняя осевая деформация $\varepsilon_z = \frac{1}{h}\int\limits_{z=-h/2}^{z=h/2} \frac{\partial w}{\partial z} dz,$ $\frac{1}{h}\int\limits_{z=-h/2}^{z=h/2} w dz = 0.$

1. Постановка задачи

В рамках теории малых деформаций, в приближении плоского напряженного состояния рассматривается задача о тонком диске постоянной толщины, вращающемся с угловой скоростью ω. Внешний контур диска $\rho = b$ свободен от усилий $\sigma_\rho |_{\rho=b} = 0$. Выбирается модель однородного изотропного идеального упругопластического тела.

2. Выбор характерных масштабов

Все соотношения записываются в безразмерном виде. В качестве масштаба для напряжений выбирается предел пластичности на одноосное растяжение k. В качестве масштаба для напряжений выбирается радиус диска. Для рассматриваемой задачи уравнение баланса импульса в дифференциальной форме в безразмерном виде содержит безразмерный комплекс $m = \gamma b^2 \omega^2 / (kg),$ где γ — объемный вес, g — ускорение свободного падения.

3. Математическая модель упругого состояния

Выбирается цилиндрическая система координат $\rho\theta z,$ ось z которой проходит через центр диска $\rho = 0,$ а плоскость $z = 0$ является средней плоскостью

Уравнение движения

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho. \tag{1}$$

Соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho &= \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, \\ E\varepsilon_\theta &= \sigma_\theta - \nu\sigma_\rho, \\ E\varepsilon_z &= -\nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta). \end{aligned} \tag{2}$$

Условие совместности деформаций

$$\rho\frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho}+\varepsilon_\theta-\varepsilon_\rho=0. \tag{3}$$

Соотношения Коши, определяющие деформации через перемещения

$$\varepsilon_\rho=\frac{du}{d\rho},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{\rho}. \tag{4}$$

Формулы компонент тензора напряжений и перемещений в упругой области диска

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho=A-\frac{B}{\rho^2}-\frac{3+\nu}{8}m\rho^2,\\
&\sigma_\theta=A+\frac{B}{\rho^2}-\frac{1+3\nu}{8}m\rho^2,\\
&Eu=(1-\nu)A\rho+\frac{1+\nu}{\rho}B-\frac{1-\nu^2}{8}m\rho^3.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для диска, находящегося в упругом состоянии

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho=\frac{3+\nu}{8}m\left(b^2-\rho^2\right),\\
&\sigma_\theta=\frac{3+\nu}{8}m\left(b^2-\frac{1+3\nu}{3+\nu}\rho^2\right),\\
&Eu=(1-\nu)\left(\frac{3+\nu}{8}b^2-\frac{1-\nu^2}{8}\rho^2\right)m\rho.
\end{aligned}$$

4. Математическая модель пластического состояния

В случае плоского напряженного состояния функция пластичности

$$F(\sigma_\rho,\sigma_\theta,\sigma_z)|_{\sigma_z=0}=f(\sigma_\rho,\sigma_\theta).$$

Поверхность пластичности (6) при $n\to\infty$ с высокой степенью точности аппроксимирует призму Треска.

Пропорции, следующие из ассоциированного закона пластического деформирования [19]

$$\frac{\varepsilon_\rho^p}{(\partial F/\partial\sigma_\rho)|_{\sigma_z=0}}=\frac{\varepsilon_\theta^p}{(\partial F/\sigma_\theta)|_{\sigma_z=0}}=\frac{\varepsilon_z^p}{(\partial F/\partial\sigma_z)|_{\sigma_z=0}}.$$

Полные деформации включают упругую и пластическую составляющие

$$\varepsilon_\rho=\varepsilon_\rho^e+\varepsilon_\rho^p,\quad \varepsilon_\theta=\varepsilon_\theta^e+\varepsilon_\theta^p,\quad \varepsilon_z=\varepsilon_z^e+\varepsilon_z^p.$$

Упругие деформации связаны с напряжениями согласно линейному закону Гука (2). Полные деформации удовлетворяют условию совместности деформаций (3) и связаны с перемещениями соотношениями Коши (4). Напряжения должны удовлетворять уравнению движения (1).

5. Напряженно-деформированное состояние диска. Условие Треска

В работе [24] в рамках теории малых деформаций рассматривалась задача о вращающемся диске для режима $\sigma_\theta=k$ условия Треска. В области $0\le\rho\le c$ реализуется пластическое состояние диска, в области $c\le\rho\le b$ — упругое. Решалась переопределенная задача, включающая шесть условий на разных границах:

1) $u|_{\rho=0}=0$, 2) $\sigma_\rho|_{\rho=b}=0$, 3) $[\sigma_\rho]|_{\rho=c}=0$, 4) $[\sigma_\theta]|_{\rho=c}=0$, 5) $[u]|_{\rho=c}=0$, 6) $\varepsilon_\theta^p|_{\rho=c}=0$.

Первое условие приводит к тому, что в пластической области

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho = k-\frac{1}{3}m\rho^2, \quad \sigma_\theta = k\\
&Eu=(1-\nu)k\rho-\frac{1}{9}m\rho^3,\\
&E\varepsilon_\theta^p=-\frac{1+3\nu}{9}m\rho^2,\\
&\varepsilon_\rho^p=0, \quad \varepsilon_z^p=-\varepsilon_\theta^p.
\end{aligned} \tag{6}$$

Из решения (6) видно, что на упругопластической границе условие $\varepsilon_\theta^p|_{\rho=c}=0$ не выполняется, то есть условие равенства нулю перемещений в центре диска противоречит условию равенства нулю пластических деформаций на упругопластической границе.

Условия непрерывности напряжений на упругопластической границе позволяют определить величины A, B в формулах (5). Из условия на границе $\rho=b$ определяется радиус упругопластической границы. При этом условие непрерывности перемещений на границе $\rho=c$ не выполняется.

Если учесть условие симметрии $\sigma_\rho|_{\rho=0}=\sigma_\theta|_{\rho=0}$ и отбросить условие $u|_{\rho=0}=0$, то, учитывая непрерывность напряжений на границе $\rho=c$, в упругой области

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho=k+\frac{1+3\nu}{12}\left(c^2-\frac{c^4}{2\rho^2}-\frac{3\mu}{2}\rho^2\right)m,\\
&\sigma_\theta=k+\frac{1+3\nu}{12}\left(c^2+\frac{c^4}{2\rho^2}-\frac{3}{2}\rho^2\right)m,\\
&Eu=\frac{1+3\nu}{12}\left(\frac{1+\nu}{2}\frac{c^2}{\rho}+(1-\nu)\rho\right)mc^2-\frac{1-\nu^2}{8}m\rho^3+(1-\nu)k\rho.
\end{aligned}$$

в пластической области, учитывая $\varepsilon_\theta^p|_{\rho=c}=0$,

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho=k-\frac{1}{3}m\rho^2, \quad \sigma_\theta=k,\\
&Eu=(1-\nu)k\rho+\left((1+3\nu)\ {}^3-\rho^3\right)\frac{m}{9},\\
&E\varepsilon_\theta^p=\frac{1+3\nu}{9}\frac{\tilde{n}^3-\rho^3}{\rho}m,\\
&\varepsilon_\rho^p=\varepsilon_\theta^p, \quad \varepsilon_z^p=-2\varepsilon_\theta^p.
\end{aligned} \tag{7}$$

Радиус упругопластической границы

$$c=\sqrt{b^2-2b\sqrt{\frac{2}{1+3\nu}\left(\frac{3k}{m}-b^2\right)}}.$$

В данном случае выполняется условие $[u]|_{\rho=c}=0$.

Формулы в (7) показывают, что при $\rho\to 0$ осевая пластическая деформация $\varepsilon_z^p\to-\infty$, то есть происходит сильное утонение диска и в центе диска происходит нарушение сплошности $Eu|_{\rho=0}=\dfrac{1+3\nu}{9}mc^3$, что вполне понятно.

6. Напряженно-деформированное состояние диска. Эффект упрочнения

При решении задачи о вращающемся диске в работе [25] было предложено рассматривать условие пластичности максимального касательного напряжений с учетом изотропного упрочнения

$$f = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2k\left(1 + \eta\varepsilon_{eq}\right).$$

Эквивалентное напряжение $\sigma_{eq} = f = k(1+\eta\varepsilon_{eq})$. Эквивалентная пластическая деформация определяется из представления элементарной работы напряжений на пластических деформациях в виде произведения $\delta A = \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p$. В следствии чего вводится дополнительное определяющее уравнение

$$\sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p.$$

При решении задачи о диске эффект упрочнения приводит к тому, что в пластической области диска $0 \le \rho \le c$ одновременно появляются две подобласти, в одной из которых $0 \le \rho \le c_1$ будет выполняться режим, для которого $\sigma_\rho = \sigma_\theta$, а в другой $c_1 \le \rho \le c$ будет выполняться режим $\sigma_\theta = \sigma_{eq}$. Учет упрочнения позволяет избежать разрыва значений искомых величин. В работе [25] показано, что уменьшение значения параметра η приводит к росту значений пластических деформаций в центре диска.

7. Напряженно-деформированное состояние диска. Условие Поля

В качестве некоторого обобщения условия пластичности Мизеса в [26] предложено условие пластичности вида

$$\left(\frac{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^{2n} + (\sigma_\theta - \sigma_z)^{2n} + (\sigma_z - \sigma_\rho)^{2n}}{2}\right)^{1/2n} = k, \quad n \in N. \tag{8}$$

При $n \to \infty$ поверхность пластичности (8) переходит в поверхность пластичности Треска. При $n = 1$ поверхность пластичности (8) переходит в поверхность пластичности Мизеса.

В пластической области $0 \le \rho \le c$ задача статически определимая и $\sigma_\rho|_{\rho=0} = \sigma_\theta|_{\rho=0} = k$. На упругопластической границе дружны выполняться условия непрерывности

$$[\sigma_\rho]|_{\rho=c} = 0, \quad [\sigma_\theta]|_{\rho=c} = 0, \quad [u]|_{\rho=c} = 0.$$

Если до начала процесса нагружения необратимые деформации были равны нулю, то

$$\varepsilon_\theta^p|_{\rho=c} = 0, \quad \varepsilon_\theta^p|_{\rho=c} = 0, \quad \varepsilon_z^p|_{\rho=c} = 0.$$

На внешнем контуре $\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0$.

На рис.1 показаны графики компонентов тензора напряжений, вектора перемещений и тензора пластических деформаций (рис. 2) для разных значений параметра *n*, когда $m = 2.7$, $\nu = 0.2$.

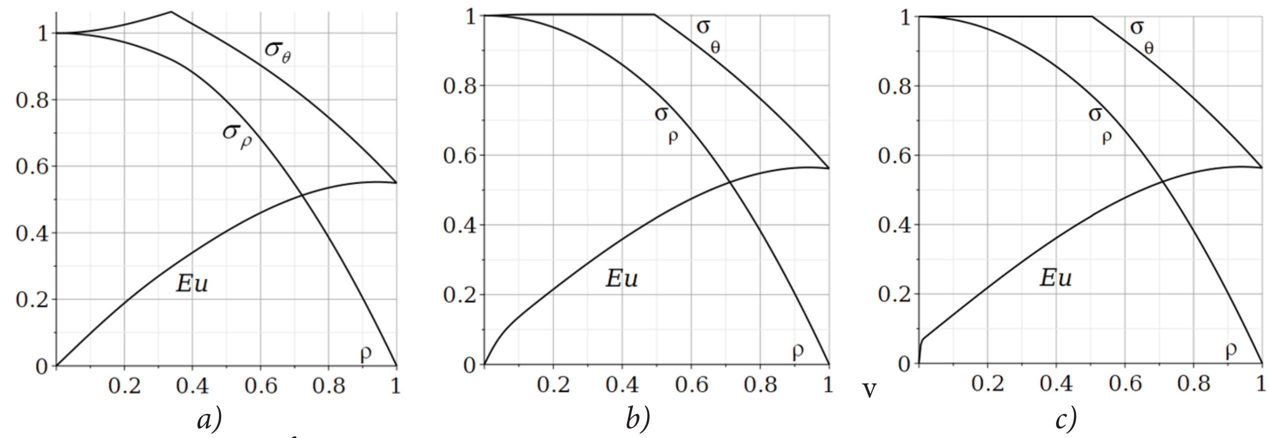


Рис. 1. Графики компонент тензора напряжений и вектора перемещений
a) $n = 1$, b) $n = 100$, c $n = 10^4$

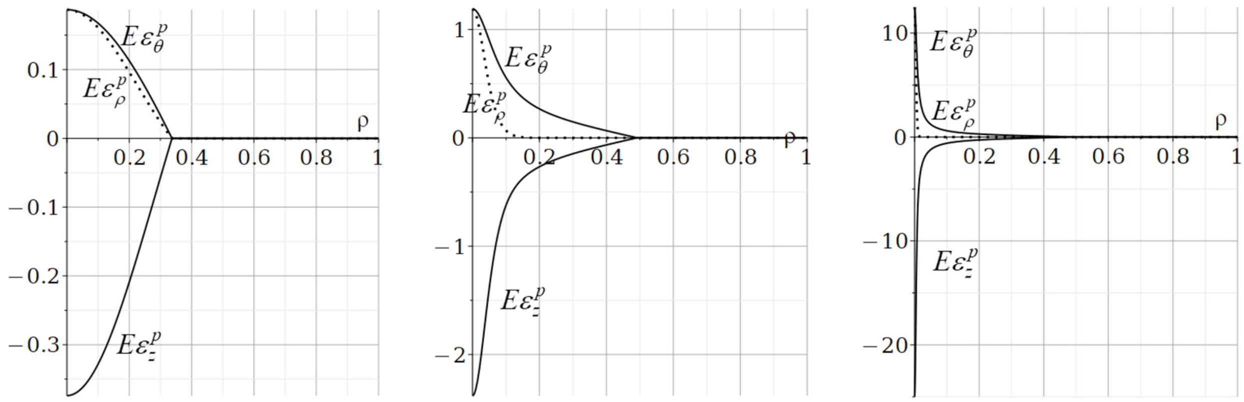


Рис. 2. Графики компонент тензора пластических деформаций a) $n=1$, b) $n=100$, c) $n=10^4$

Заключение

Результаты, полученные в данной работе, показывают, что при выборе условия пластичности Поля все искомые величины остаются непрерывными. При увеличении значения параметра n в центре диска происходит увеличение значений деформаций, что приводит к утонению диска. При $n=1$ (условие пластичности Поля переходит в условие пластичности Мизеса) пластические деформации в центре того же порядка, что и упругие деформации. При $n>10^2$ и более пластически деформации, а следовательно, полные деформации, в окрестности центра диска нельзя считать малыми, что нарушает положения и следствия используемой теории малых деформаций. В случае плоского напряженного состояния идеально пластических тел для кусочно-линейных пластических потенциалов при реализации сингулярных режимов происходит разрыв радиальной пластической деформации.

Литература

1. *Надаи А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества / А. Надаи. – Москва : Объединенное научно-техническое издательство, 1936. – 280 с.

2. Демьянушко И. В. Расчет на прочность вращающихся дисков / И. В. Демьянушко, И. А. Биргер. – Москва : Машиностроение, 1978. – 247 с.

3. *Левин А. В.* Рабочие лопатки и диски паровых турбин / А. В. Левин. – Москва : Госэнергоиздат, 1963. – 624 с.

4. *Соколовский В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.

5. *Calladine C. R.* Engineering Plasticity / C. R. Calladine – Oxford, England : Pergamon Press, 1969. – 337 p.

6. *Chakrabarty J.* Theory of Plasticity / J. Chakrabarty – Oxford, England : Elsevier Butterworth – Heinemann, – 2006. – 882 p.

7. *Alexandrov S.* Elastic/Plastic Discs Under Plane Stress Conditions / S. Alexandrov. – New York : Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, – 2015. – 113 p. – DOI: 10.1007/978-3-319-14580-8.

8. *Aleksandrova N.* Application of Mises yield criterion to rotating solid disk problem / N. Aleksandrova. – International Journal of Engineering Science. – 2012. – V. 51. – P. 333–337. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2011.10.006.

9. *Lomakin E.* Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs / E. Lomakin, S. Alexandrov, Y. R. Jeng. // Archive of Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 86, Iss. 1–2. – P. 235–244. – DOI: 10.1007/s00419-015-1101-9.

10. *Лямина Е. А.* Дизайн равнопрочного вращающегося диска / Е. А. Лямина, О. В. Новожилова // Инновационные транспортные системы и технологии. – 2023. – Т. 9, № 1. – С. 122–134.

11. *Артемов М. А.* Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска / М. А. Артемов, А. П. Якубенко. // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 30−38.

12. О появлении пластических областей во вращающемся диске / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, Р. Г. Меджидов [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – № 1 (59). – С. 21–39.

13. Mathematical modeling of rotating disk states / E. V. Semka, M. A. Artemov, Y. N. Babkina [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012122.

14. *Paul SK.* Stress Analysis of Functionally Graded Disk with Exponentially Varying Thickness Using Iterative Method / SK Paul, M. Sahni. // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. – 2021.16. – P. 232–244. – DOI: 10.37394/232011.2021.16.26.

15. *Sharma D.* Investigation of Thermo-Elastic Characteristics in Functionally Graded Rotating Disk Using Finite Element Method / D. Sharma, R. Kaur, H. Sharma. // Nonlinear Engineering. – 2021.10. – P. 312–322. – DOI: 10.1515/nleng-2021-0025

16. *Madan R.* Limit Elastic Analysis of Functionally Graded Rotating Disks Under Thermo-Mechanical Loading / R. Madan, S. Bhowmick. // International Journal of Applied Mechanics. – 2021.13. Article 2150033. – DOI: 10.1142/S1758825121500332

17. *Sahni M.* Elastic-plastic deformation of a thin rotating solid disk of exponentially varying density / M. Sahni, S. Sharma. // Research on Engineering Structures and Materials. – 2017. – Vol. 3, Iss. 2. – P. 123–133. – DOI: 10.17515/resm2016.41me0401.

18. *Бегун А. С.* Необратимое деформирование вращающегося диска в условиях пластичности и ползучести / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк. // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2021. – Т. 163, кн. 2. – С. 167–180. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.167-180.

19. On stress/strain state in a rotating disk / N. N. Aleksandrova, M. A. Artemov, E. S. Baranovskii [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1203. – P. 8. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012001.

20. *Prokudin A. N.* Schmidt-Ishlinskii Yield Criterion and a Rotating Cylinder with a Rigid Inclusion / A.N. Prokudin. // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2021. – Vol. 7, Iss. 2. – P. 858–869. – DOI: 10.22055/JACM.2020. 35648.2704.

21. *Фрейденталь А.* Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. Москва : Физматгиз, 1962. – 432 с.

22. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – Москва : Наука, 1966. – 233 с.

23. *Новацкий В.* Теория упругости. / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.

24. *Gamer U.* Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk / U. Gamer. // Journal of Applied Mechanics. – 1983. – Vol. 50, Issue 2. – P. 676–678. – DOI: 10.1115/1.3167110.

25. *Gamer U.* Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk / Gamer U. // Ingenieur-Archiv. – 1984. – V. 54. – Issue 5. – P. 345–354. – DOI: 10.1007/BF00532817.

26. *Поль Б.* Критерии пластического течения и хрупкого разрушения / Б. Поль // Разрушение: Математические основы теории разрушения. – 1975. – Москва : Мир. – Т. 2 : сб. науч. трудов. – С. 336–520.

УДК 539.5, 531.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

А. А. Афанасьев, А. В. Сухорукова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Проведено исследование влияния диаграммы деформирования материала на напряженно-деформированное состояние вращающихся дисков. Рассматривается три варианта материала: без упрочнения, линейно изотропно упрочняющийся материал. Решение получено в пакете автоматизированного конструирования ANSYS Mechanical.
Ключевые слова: слова: ANSYS Mechanical, упрочнение, коэффициентом упрочнения, деформации, пластичность.

Решение в ANSYS Mechanical более сложных упругопластических задач сопряжено с вопросами корректного описания свойств материала и задания граничных условий. Выбор модели упрочнения значительно влияет на получаемые результаты.

В турбомашиностроении для оценки оборотов потери несущей способности диска широко используются формулы, основанные на условии пластичности Треска. Как показывается в данной главе, существующие формулы дают заниженную оценку. Проведены исследования напряженно-деформированного состояния сплошного и кольцевого дисков для условия пластичности Мизеса.

При увеличении угловой скорости вращения диска, при достижении некоторых оборотов в центре возникает пластическое состояние. С возрастанием оборотов упругопластическая зона заполняет некоторый круг радиуса ρ_s. Круговое кольцо вне этого круга остается в линейно упругом состоянии.

Пусть в диске реализуется плоское напряженное состояние. Решение будем осуществлять в цилиндрической системе координат r, θ, Z, ось Z которой совпадает с осью вращения диска. Величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу R_0 диска, а величины, имеющие размерность напряжения, к пределу текучести k_0.

Уравнение равновесия имеет вид:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 = 0,$$

где нагрузка от действия центробежных сил (ρ_0 — плотность материала диска) выражается как

$$m = \rho_0 \frac{\omega^2 R_0^2}{k_0}.$$

Кинематические соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p^e + \varepsilon_p^p,$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p.$$

Уравнение равновесия дополняется соотношениями Дюамеля — Неймана

$$E\varepsilon_p^e = \sigma_p - \nu\sigma_\theta + E\alpha T,$$

$$E\varepsilon_\theta^e = \sigma_\theta - \nu\sigma_p + E\alpha T.$$

и условием совместности деформаций

$$\rho \frac{d\varepsilon_0}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0$$

Дополним систему уравнений соотношениями Коши:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho},\ \ \varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}.$$

Запишем уравнение теплопроводности для определения распределения температуры.

$$\frac{dT}{dt} - a^2 \Delta T = 0,$$

где a^2 — коэффициент температуропроводности:

$$a^2 = \sqrt{\frac{k}{\rho_c}}.$$

Пусть на наружном контуре диска и в центре диска заданы температуры T_a и T_b соответственно

$$T(1) = T_a,\ \ T(0) = T_b.$$

Пусть выполняется условие пластичности Мизеса, с учетом того, что предел текучести является функцией интенсивности пластической деформации.

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = f(\varepsilon_i^p, T), \qquad \text{где}$$

$$\varepsilon_i^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_p^p - \varepsilon_p^p \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_\theta^{p2}}\ .$$

Дополним систему уравнений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$d\varepsilon_p^p = 2d\lambda(\sigma_p - \sigma_\theta),$$

$$d\varepsilon_\theta^p = 2d\lambda(\sigma_\theta - \sigma_p).$$

Математическая модель состоит из замкнутой системы уравнений. Дополним полученную систему уравнений граничными условиями и условиями неразрывности вектора напряжений и перемещений на упругопластической границе.

Пусть внешний контур свободен от усилий, тогда

$$\sigma_p(1) = 0.$$

Перемещение точки, находящейся на оси вращения, отсутствует

$$u(0) = 0.$$

Окружные и радиальные напряжения в центре диска равны

$$\sigma_p(0) = \sigma_\theta(0).$$

На упругопластической границе

$$\left[\sigma_p\right]_{ps} = 0,$$

$$\left[\sigma_\theta\right]_{ps} = 0,$$

$$\left[u\right]_{ps} = 0.$$

Рассмотрим решение в пакете автоматизированного конструирования ANSYS Mechanical.

Дискретизацию расчетной области при решении упругопластических задач следует проводить элементами, размер которых значительно меньше, чем у элементов, используемых в упругой задаче. Получаемое решение слабо зависит от сетки при условии, что в радиальном направлении расположить не менее 100 элементов. Сетка, на которой проводился расчет, содержит 98561 узел и 32644 элемента.

Проведем исследование для диска, выполненного из стали: $E = 2*10^{11}\,Па,\ \ \nu = 0.3$. Примем коэффициент теплопроводности $c = 60\ Вт/м*K$. Выберем параметр, отвечающий за нагрузку от действия центробежных сил $m = 3{,}141$.

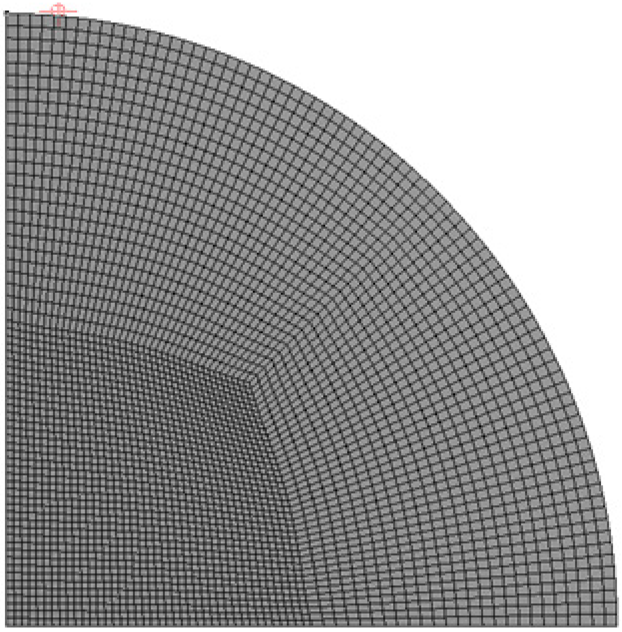


Рис. 1. Сетка

При решении задачи методом конечных элементов рассмотрим два варианта условия пластичности

• упрочнение отсутствует, то есть когда функция $f(\varepsilon_i^p, T) = a_i T + a_2$ и условие пластичности приобретает вид

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = a_1 T + a_2,$$

где a_1, a_2 — некоторые константы материала

• упрочнение происходит изотропно по линейному закону с постоянным коэффициентом упрочнения

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = a_1 T + a_2 + c\varepsilon_i^p;$$

В результате численного решения получены зависимости компонент напряжений, деформаций и перемещений от безразмерной радиальной координаты.

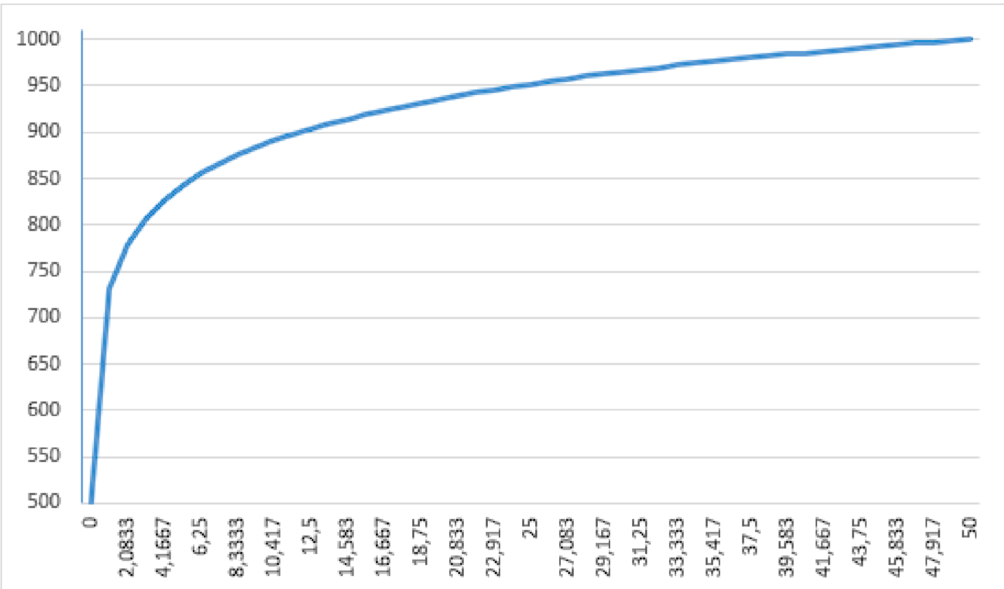


Рис. 2. Распределение температуры по радиусу

Рассмотрим случай, когда упрочнение отсутствует. В результате численного решения получены зависимости компонент напряжений от безразмерной радиальной координаты. Данные зависимости показаны на рис. 3–8

$$\sigma_e = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2}.$$

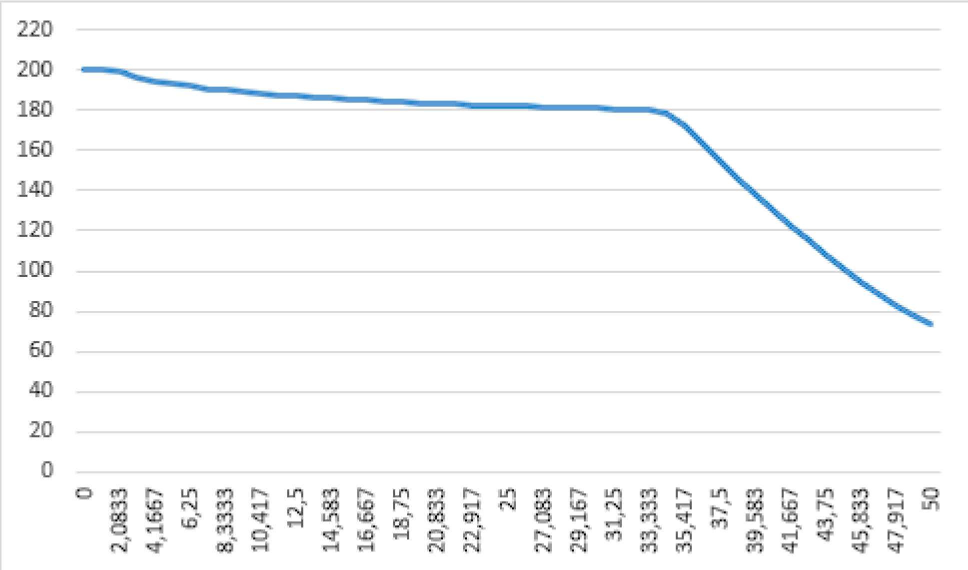


Рис. 3. Эквивалентные напряжения при отсутствии упрочнения

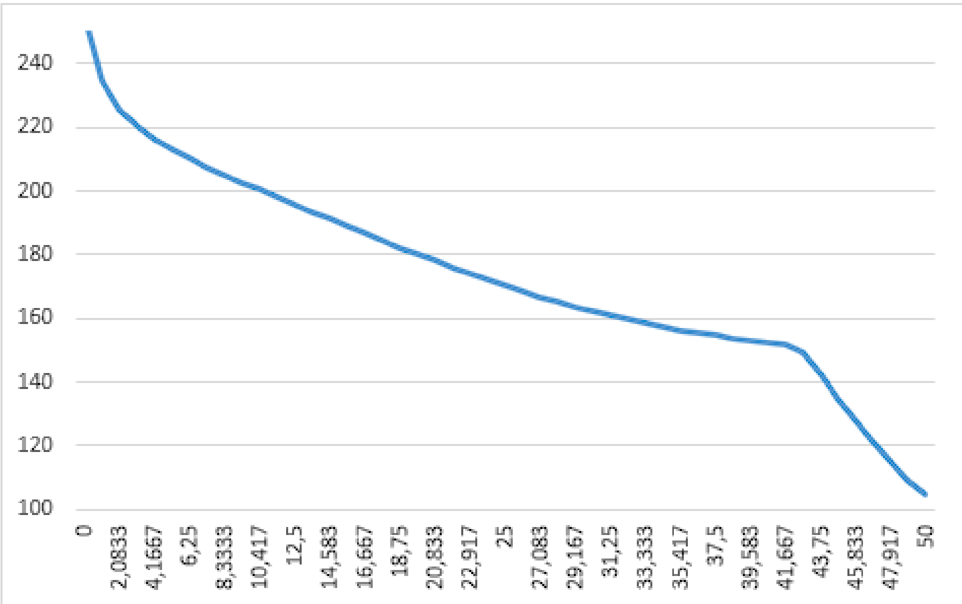


Рис. 4. Эквивалентные напряжения с учётом упрочнения

Максимум окружных напряжений достигается на упругопластической границе. Радиальные напряжения σ_ρ монотонно убывают. Зависимость интенсивности напряжений от радиуса, представленная на рис. 4, полностью согласуется с заданным условием пластичности. При данном значении параметра нагружения m получен радиус упругопластической границы $\rho_s = 34$ *мм*.

Рассмотрим случай линейно изотропно упрочняющегося материала. Нагружение центробежными силами произведем аналогично случаю без упрочнения. В результате численного

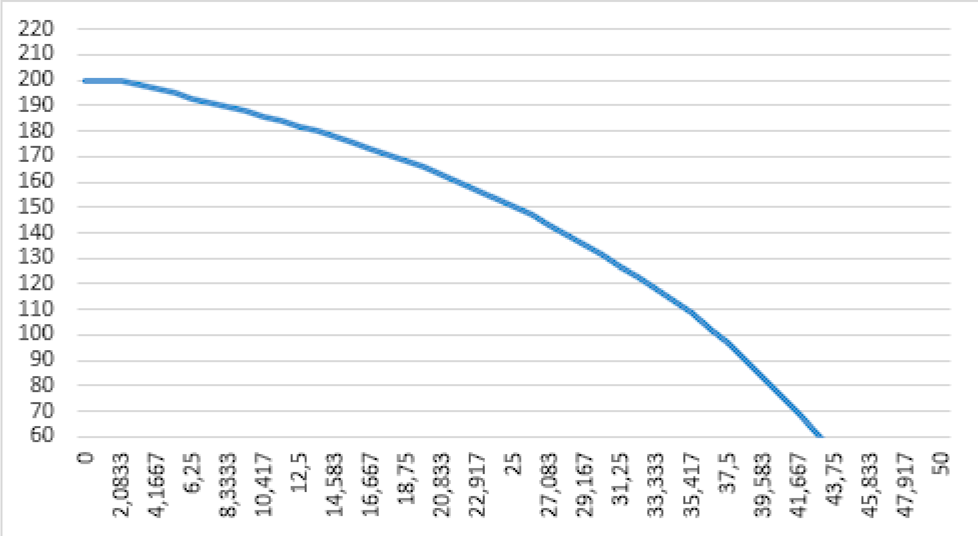


Рис. 5. Радиальные напряжения при отсутствии упрочнения

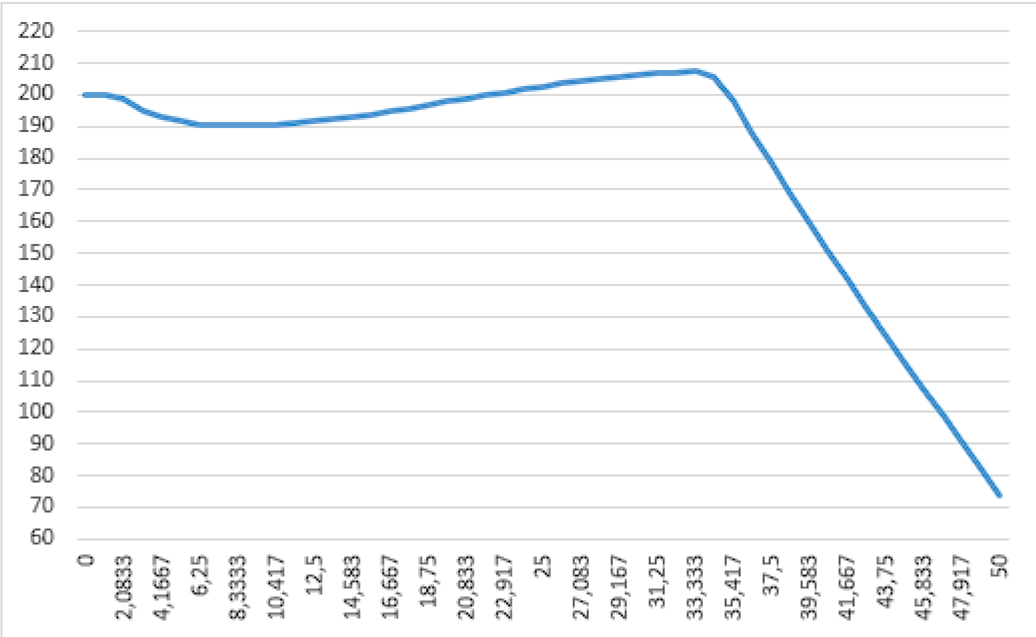


Рис. 6. Окружные напряжения при отсутствии упрочнения

решения получены зависимости компонент напряжений, деформаций и перемещений от безразмерной радиальной координаты.

Радиальные и окружные напряжения монотонно убывают. В центре диска $\sigma_\rho(0) = \sigma_\theta(0) > 1$, что связано с эффектом упрочнения материала. Если устремить коэффициент упрочнения к нулю, то, как и в случае задачи без упрочнения, будет выполняться $\sigma_\rho(0) = \sigma_\theta(0) = 1$. Интенсивность напряжений максимальна в центре диска и на 2,66 % выше, чем в случае с коэффициентом упрочнения равным нулю.

Качественно зависимости, полученные для компонент напряжений в случае без упрочнения и линейно изотропно упрочняющегося тела, совпадают. Интенсивность напряжений в случае линейно изотропно упрочняющегося тела в пластической зоне выше.

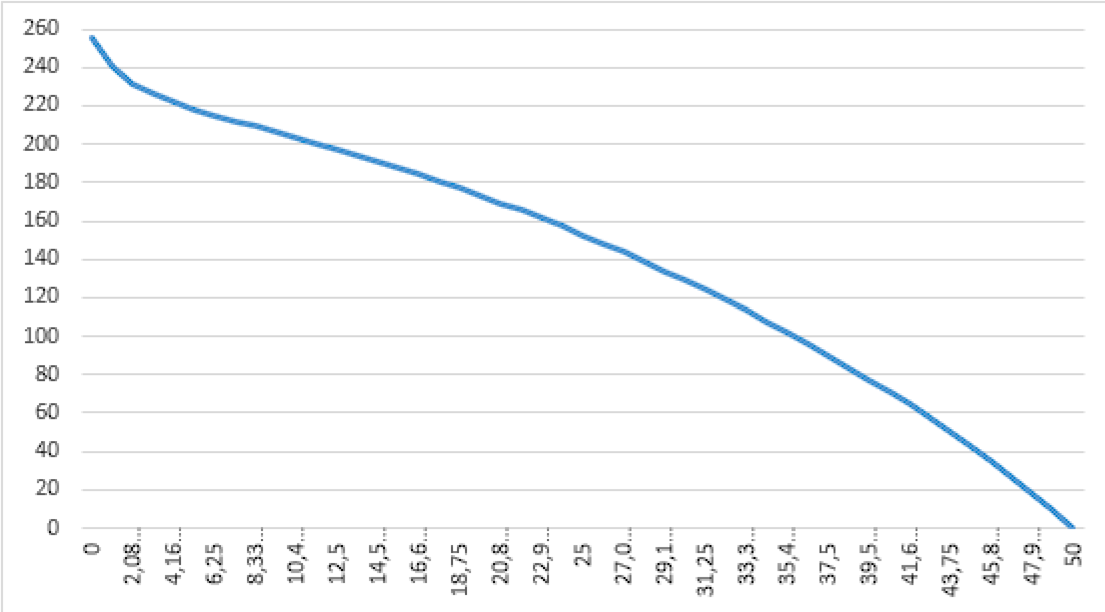


Рис. 7. Радиальные напряжения с учётом упрочнения

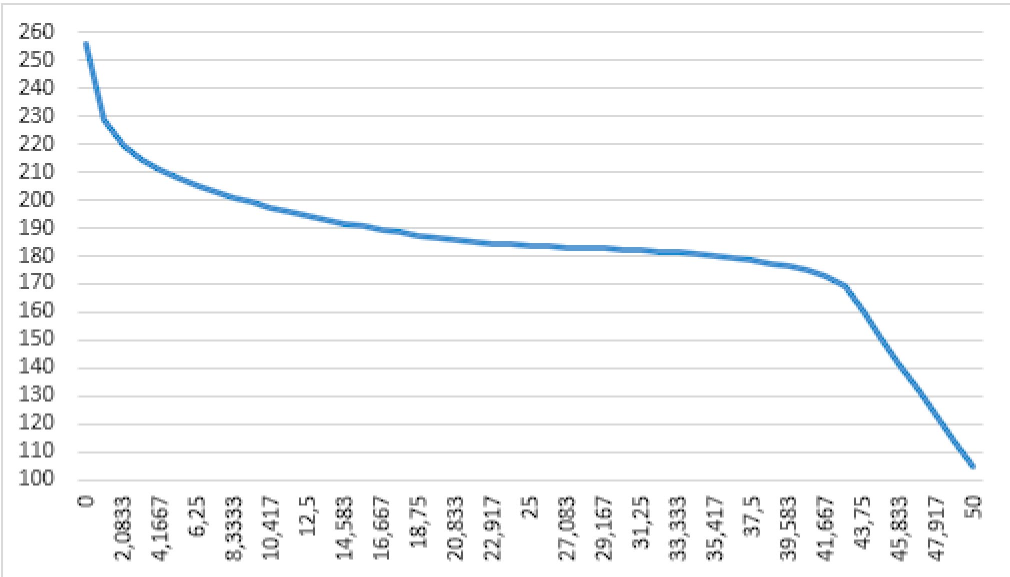


Рис. 8. Окружные напряжения с учётом упрочнения

Литература

1. *Биргер И. А.* Расчет на прочность деталей машин : справочник / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1993 – 640 с.

2. *Демьянушко И. В.* Расчет на прочность вращающихся дисков / И. В. Демьянушко, И. А. Биргер. – М. : Машиностроение, 1978 – 247 с.

УДК 539.375

НОРМАЛЬНЫЙ ОТРЫВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ КОМПОЗИТА

В. Э. Богачева

Тульский государственный университет

Аннотация. Исследуется упругопластическое деформирование композитной пластины, состоящей из двух консолей, связанных адгезионным слоем в состоянии плоской деформации. Используя концепцию «слоя взаимодействия», получена общая вариационная постановка, от которой с учетом теории Миндлина — Рейсснера и критерия Треска — Сен-Венана осуществлен переход к постановке в дифференциальном виде. Получено общее аналитическое решение. Удовлетворив граничным условия и условиям сопряжения, построены графики поля перемещений и напряжений в адгезионном слое для различных адгезивов при значении внешней нагрузки, соответствующей инициализации трещины в эксперименте.

Ключевые слова: адгезионный слой, композит, слой взаимодействия, линейный параметр, нормальный отрыв, упругопластическое деформирование, критерий Треска — Сен-Венана.

Введение

При экспериментальных исследованиях трещиностойкости адгезионных слоев в качестве образца обычно используют двухконсольную балку. А трещиноподобный дефект в адгезиве моделируют не только в виде математического разреза с жестким сцеплением сопрягаемых тел, но и в виде слоя с характерной толщиной [1–5].

В данной работе рассматривается образец, экспериментально изученный в статье [6] с различными материалами адгезионного слоя. С учетом того, что у композита тонкий адгезионный слой, в работе [7] подробно описано получение упругого аналитического решения. В статье [8] найдены пределы упругости для образца с различными материалами слоя. Показано, что для адгезива Araldite AV138 можно ограничиться упругой постановкой задачи, а для Araldite 2015 и Sikaforce 7752 необходимо перейти к упругопластической постановке. В статье [9] методом конечных элементов было определено, что в случае плоской деформации возможно образование нескольких зон упругопластического деформирования с разными знаками гидростатического давления, но основной вклад в значение прочностных характеристик вносит напряженно-деформируемое состояние зоны пластичности на торце адгезионного слоя. С учетом всех полученных ранее результатов, в данной работе найдено упругопластическое решение задачи.

1. Постановка задачи

Рассматривается образец длиной $\ell + a$, где $a = 0.055$ м; $\ell = 0.2$ м; $b = 0.025$ м; b — толщина образца (рис. 1). Консоли 1 и 2 имеют одинаковые толщины $h = 0.0127$ м, модуль упругости $E = 2.04 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$. По длине ℓ тела связаны адгезионным слоем 3, толщина которого $\delta_0 = 10^{-3}$ м. Механические и прочностные характеристики для адгезивов приведены в табл. 1 [6].

Правый торец композита закреплен от перемещений, на левых торцах консолей действует антисимметричная распределенная нагрузка интенсивностью P. На остальную поверхность образца не действует внешняя нагрузка. Композит рассматриваем в состоянии плоской деформации. Поведение консолей установлено в рамках линейной теории упругости, а материал слоя является идеально упругопластическим.

Таблица 1

Механические и прочностные характеристики адгезионных слоев

	E_3, Па	ν_3	τ_0, МПа	P_{cr}, Н
Araldite 2015	$1.85\cdot10^9$	0.33	14.6	1500
Sikaforce 7752	$0.49\cdot10^9$	0.3	5.2	3100

где E_3, ν_3 — модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезионного слоя 3; τ_0 — предел текучести; P_{cr} — экспериментальное значение внешней нагрузки при инициализации трещины в адгезиве толщиной $\delta_0 = 10^{-3}$ м [6].

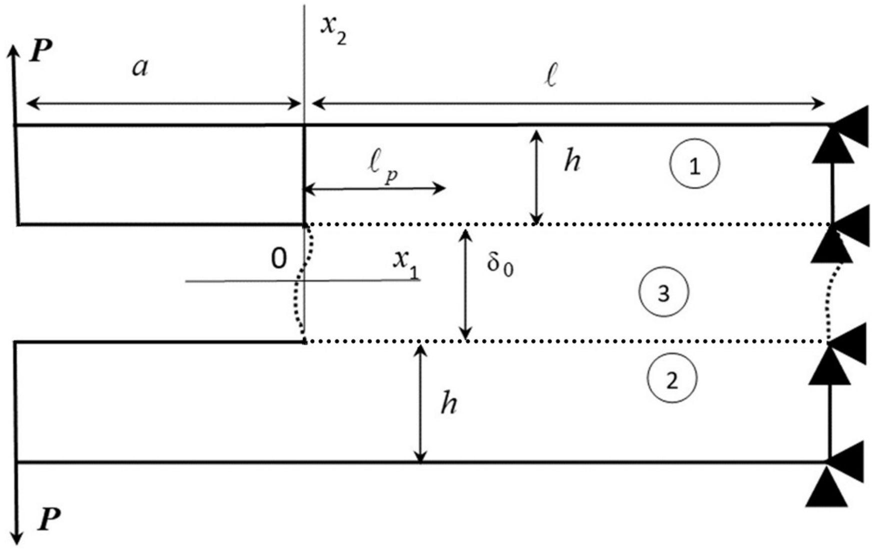


Рис. 1. Схема нагружения образца

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия», развитую в работе [5]. Для рассматриваемого образца поле перемещений границ слоя 3 имеет вид: $u_1^+ = u_1^-$, $u_2^+ = -u_2^-$, где u_n^+, u_n^- — соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя, $n = 1,2$ здесь и далее, а касательное напряжение $\bar{\sigma}_{12} = 0$. Поэтому запишем уравнение равновесия в вариационной форме для консоли 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5\delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \boldsymbol{P} \cdot \delta \boldsymbol{u} dl, \tag{1}$$

где $\cdot\cdot$ — двойное скалярное умножение; $\cdot$ — скалярное умножение; S_1 – площадь поперечного сечения тела 1; L_1 — граница приложения внешней нагрузки для тела 1; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — тензоры средних напряжений и деформаций слоя с компонентами: $\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{\delta_0}\int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11} dx_2$, $\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = \frac{1}{\delta_0}\int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21} dx_2$, $\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{\delta_0}\int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22} dx_2$, $\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{du_1^+}{dx_1}$, $\bar{\varepsilon}_{22} = 2u_2^+ / \delta_0$, $\bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\varepsilon}_{21} = 0$.

Для области упругого деформирования определяющие соотношения запишем в виде закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\delta_{ij}\right), \ \bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1+\nu_3}\left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1-2\nu_3}\bar{\varepsilon}\delta_{ij}\right), \tag{2}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}$ — объемная деформация; δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = 1,2,3$.

В области необратимого деформирования адгезионного слоя предполагаем выполнение критерия Треска — Сен-Венана [10] при условии полной пластичности. При нагружении нормальным отрывом выполняется равенство двух главных напряжений $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{33}$. Следовательно, условие текучести запишем в виде:

$$\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{11} = 2\tau_0. \quad (3)$$

Поле перемещений в теле 1 определяем согласно теории Миндлина [11]:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \ u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1). \quad (4)$$

Учитывая теорию пластин Миндлина — Рейсснера [12], из (2) получим определяющие соотношения для консоли 1:

$$\sigma_{11} = D\left(u_1^{+\prime} - \varphi'(x_2 - \delta_0/2)\right), \ \sigma_{12} = L\left(u_2^{+\prime} - \varphi\right), \quad (5)$$

где $L = k\dfrac{E}{2(1+\nu)}$; $k = \dfrac{5}{6}$; $D = \dfrac{E}{(1-\nu^2)}$;

и слоя взаимодействия при обратимом деформировании:

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 u_1^{+\prime} + D_2 u_2^+, \ \bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 u_1^{+\prime}, \quad (6)$$

где $D_1 = \dfrac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$; $D_2 = \dfrac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$; $C_1 = \dfrac{2D_1}{\delta_0}$; $C_2 = \dfrac{\delta_0 D_2}{2}$.

На участке с упругопластическим деформированием слоя 3 предполагаем линейную связь между объемной деформацией слоя и гидростатическим давлением:

$$\bar{\sigma}_{11} = Ku_1^{+\prime} + \frac{2K}{\delta_0}u_2^+ - \frac{2}{3}\tau_0, \ \bar{\sigma}_{22} = Ku_1^{+\prime} + \frac{2K}{\delta_0}u_2^+ + \frac{4}{3}\tau_0. \quad (7)$$

где K — модуль объемной деформации; $K = \dfrac{E_3}{3(1-2\nu_3)}$.

От вариационного уравнения (1) приходим к системам дифференциальных уравнений второго порядка для тела 1:

$$\begin{cases} \dfrac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; \ \dfrac{dQ_{11}}{dx_1} = 0; \ \dfrac{dQ_{12}}{dx_1} = 0; \ x_1 \in [-a; 0), \\ \dfrac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; \ \dfrac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0\dfrac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0; \ \dfrac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}; \ x_1 \in (0; \ell], \end{cases} \quad (8)$$

где $Q_{11}(x_1) = Dh\left(u_1^{+\prime} - \dfrac{h}{2}\varphi'\right)$, $Q_{12}(x_1) = Lh\left(u_2^{+\prime} - \varphi\right)$, $M_{11} = Dh^2\left(\dfrac{1}{2}u_1^{+\prime} - \dfrac{h}{3}\varphi'\right)$ — обобщенные силы и обобщенный момент.

Система (8) замкнута граничными условиями:

$$u_n^+\big|_{x_1=\ell} = 0, \ \varphi\big|_{x_1=\ell} = 0, \ M_{11}\big|_{x_1=-a} = 0, \ Q_{11}\big|_{x_1=-a} = 0, \ Q_{12}\big|_{x_1=-a} = -P/b, \quad (9)$$

и условиями сопряжения:

$$\begin{gathered} u_n^+\big|_{x_1=-0} = u_n^+\big|_{x_1=+0}, \ \varphi\big|_{x_1=-0} = \varphi\big|_{x_1=+0}, \ M_{11}\big|_{x_1=-0} = M_{11}\big|_{x_1=+0}, \\ Q_{12}\big|_{x_1=-0} = Q_{12}\big|_{x_1=+0}, \ Q_{11}\big|_{x_1=-0} = \left(Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\big|_{x_1=+0}, \\ u_n^+\big|_{x_1=\ell_p-0} = u_n^+\big|_{x_1=\ell_p+0}, \ \varphi\big|_{x_1=\ell_p-0} = \varphi\big|_{x_1=\ell_p+0}, \ M_{11}\big|_{x_1=\ell_p-0} = M_{11}\big|_{x_1=\ell_p+0}, \\ Q_{12}\big|_{x_1=\ell_p-0} = Q_{12}\big|_{x_1=\ell_p+0}, \ Q_{11}\big|_{x_1=\ell_p-0} = \left(Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\big|_{x_1=\ell_p+0}. \end{gathered} \quad (10)$$

Для исследования напряженно-деформированного состояния слоя ограничимся рассмотрением дифференциальных уравнений участка $(0; \ell]$, используя следующие условия:

$$u_n^+\Big|_{x_1=\ell}=0,\ \varphi\Big|_{x_1=\ell}=0,\ M_{11}\Big|_{x_1=+0}=-Pa/b,\ \left(Q_{11}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\Big|_{x_1=+0}=0,\ Q_{12}\Big|_{x_1=+0}=-P/b. \qquad (11)$$

Решение поставленной задачи определяет три неизвестные функции $u_1^+,\ u_2^+,\ \varphi$.

2. Решение задачи

Для образца с принятыми ранее механическими и геометрическими характеристиками на участке $(0;\ell_p]$ получено следующее общее решение системы (8):

$$\begin{gathered}u_1^+=\tilde{C}_2e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}-R_9\cos\left(R_2x_1\right)+\\+R_{10}\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix}+\tilde{C}_3e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}R_{10}\cos\left(R_2x_1\right)+\\+R_9\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix}-\\-\tilde{C}_4e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}R_9\cos\left(R_2x_1\right)+\\+R_{10}\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix}+\tilde{C}_5e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}-R_{10}\cos\left(R_2x_1\right)+\\+R_9\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix}+\\+\frac{1}{Dh}\tilde{C}_1x_1+\frac{2\tau_0\delta_0}{3Dh}x_1+\tilde{C}_6,\end{gathered}\qquad (12)$$

$$\begin{gathered}u_2^+=\tilde{C}_2e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}R_1\cos\left(R_2x_1\right)-\\-R_2\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix}-\tilde{C}_3e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}R_2\cos\left(R_2x_1\right)+\\+R_1\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix}-\\-\tilde{C}_4e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}R_1\cos\left(R_2x_1\right)+\\+R_2\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix}+\tilde{C}_5e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}-R_2\cos\left(R_2x_1\right)+\\+R_1\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix}-\\-\frac{\delta_0}{2Dh}\tilde{C}_1-\frac{2\tau_0\delta_0S}{3Dh},\end{gathered}\qquad (13)$$

$$\begin{gathered}\varphi=\tilde{C}_2e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}R_3\cos\left(R_2x_1\right)+\\-R_4\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix}-\tilde{C}_3e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}R_4\cos\left(R_2x_1\right)+\\+R_3\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix}+\\+\tilde{C}_4e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}R_3\cos\left(R_2x_1\right)+\\+R_4\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix}+\tilde{C}_5e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}R_4\cos\left(R_2x_1\right)+\\-R_3\sin\left(R_2x_1\right)\end{bmatrix},\end{gathered}\qquad (14)$$

где $\Delta=4D^2h^4(1-\delta_0T)$; $T=12L(2LS+Dh)/(D^2h^2)$; $S=Dh/K+0.5\delta_0$; $R_1=\sqrt{0.5\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha\right)}$; $R_2=\sqrt{0.5\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha\right)}$; $\alpha=(Dh-6L\delta_0)/(Lh\delta_0(Dh/K+2\delta_0))$; $\beta=D\sqrt{\delta_0T-1}/(L\delta_0(Dh/K+2\delta_0))$; $R_3=2LS(R_1^2-R_2^2-2D/(LS\delta_0))/V$; $R_4=4LSR_1R_2/V$; $V=2LS+Dh$; $R_5=Dh^2(R_2R_4-R_1R_3)/(2SK)+R_1/S$; $R_6=-Dh^2(R_1R_4+R_2R_3)/(2SK)+R_2/S$; $R_7=R_1/(R_1^2+R_2^2)$; $R_8=R_2/(R_1^2+R_2^2)$; $R_9=R_5R_7+R_6R_8$; $R_{10}=R_6R_7-R_5R_8$.

Согласно работе (7) запишем общее решение на участке $(\ell_p;\ell]$:

$$\begin{gathered}u_1^+=\tilde{C}_8e^{F_1x_1}\begin{bmatrix}-F_9\cos\left(F_2x_1\right)+\\+F_{10}\sin\left(F_2x_1\right)\end{bmatrix}+\tilde{C}_9e^{F_1x_1}\begin{bmatrix}F_{10}\cos\left(F_2x_1\right)+\\+F_9\sin\left(F_2x_1\right)\end{bmatrix}-\\-\tilde{C}_{10}e^{-F_1x_1}\begin{bmatrix}F_9\cos\left(F_2x_1\right)+\\+F_{10}\sin\left(F_2x_1\right)\end{bmatrix}+\tilde{C}_{11}e^{-F_1x_1}\begin{bmatrix}-F_{10}\cos\left(F_2x_1\right)+\\+F_9\sin\left(F_2x_1\right)\end{bmatrix}+\\+\left[\frac{\delta_0D_2C_2}{2S_2\left(C_1S_2-0.5\delta_0D_2C_2\right)}+\frac{1}{S_2}\right]\tilde{C}_7x_1+\tilde{C}_{12},\end{gathered}\qquad (15)$$

$$u_2^+ = \tilde{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_1 \cos(F_2 x_1) - \\ -F_2 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_2 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_1 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} -$$

$$-\tilde{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_1 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_2 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_2 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_1 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \qquad (16)$$

$$-\frac{C_2}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2} \tilde{C}_7,$$

$$\varphi = -\tilde{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_3 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_4 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_4 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_3 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} +$$

$$+\tilde{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_3 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_4 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_4 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_3 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

где $d = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4;$ $m_1 = 1 + \frac{DhC_2}{2LS_2};$ $m_2 = \frac{1}{Lh}\left(C_1 - \frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2}\right);$ $m_3 = -\frac{3(\delta_0 D_2 Dh + 4LS_2)}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)};$ $m_4 = \frac{12LS_2}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)};$ $S_2 = Dh + 0.5\delta_0 D_1.$ $F_1 = \sqrt{0.5\left(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} + \xi\right)};$ $F_2 = \sqrt{0.5\left(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} - \xi\right)};$ $\xi = 0.5(m_2 + m_1 m_3 + m_4);$ $\zeta = 0.5\sqrt{-d};$ $F_3 = (m_2 - F_1^2 + F_2^2)/m_1;$ $F_4 = (2F_1 F_2)/m_1;$ $F_5 = 0.5(Dh^2(F_1 F_3 + F_2 F_4) + \delta_0 D_2 F_1)/S_2;$ $F_6 = 0.5(Dh^2(F_2 F_3 - F_1 F_4) + \delta_0 D_2 F_2)/S_2;$ $F_7 = F_1/(F_1^2 + F_2^2);$ $F_8 = F_2/(F_1^2 + F_2^2);$ $F_9 = F_5 F_7 + F_6 F_8;$ $F_{10} = F_6 F_7 - F_5 F_8.$

На рис. 2 построены графики горизонтальных перемещений верхней границы адгезионного слоя u_1^+ (12), (15). Кривая 1 соответствует адгезиву Araldite 2015, кривая 2 — Sikaforce 7752, пунктирной линией выделены участки с пластикой. Аналогично на рис. 3 построены графики вертикальных перемещений u_2^+ (13), (16), на рис. 4 — графики угла поворота φ (14), (17), на рис. 5 — распределение напряжений (6)–(7) $\bar{\sigma}_{11}$ в адгезионном слое, на рис. 6 — $\bar{\sigma}_{22}$.

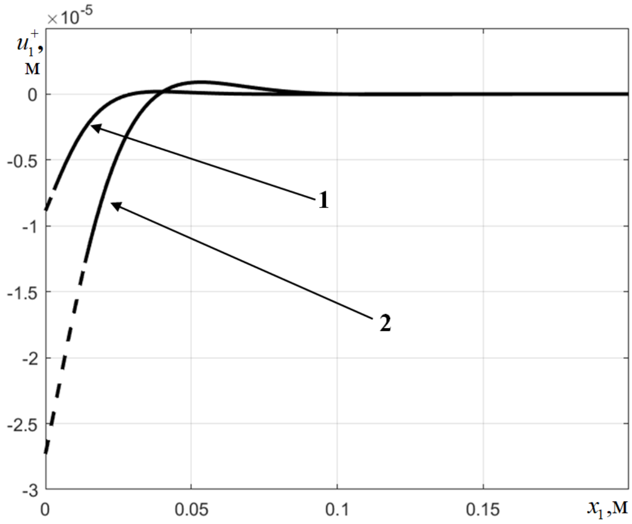


Рис. 2. Перемещения u_1^+

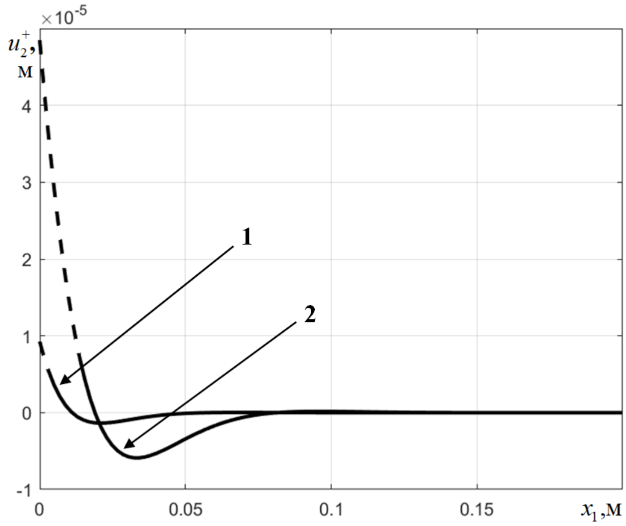


Рис. 3. Перемещения u_2^+

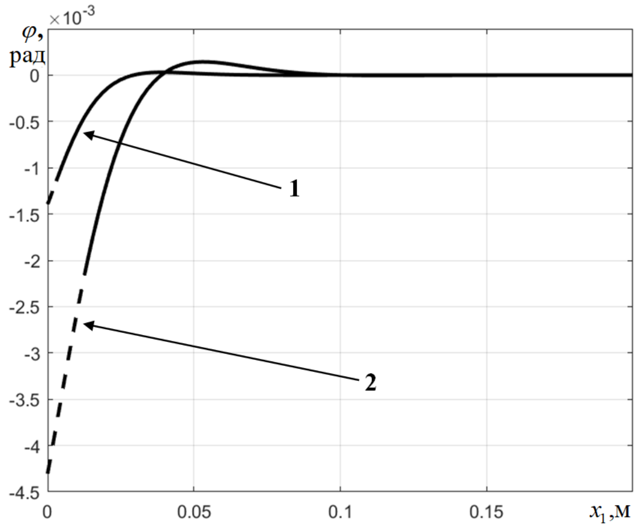


Рис. 4. Углы поворота φ

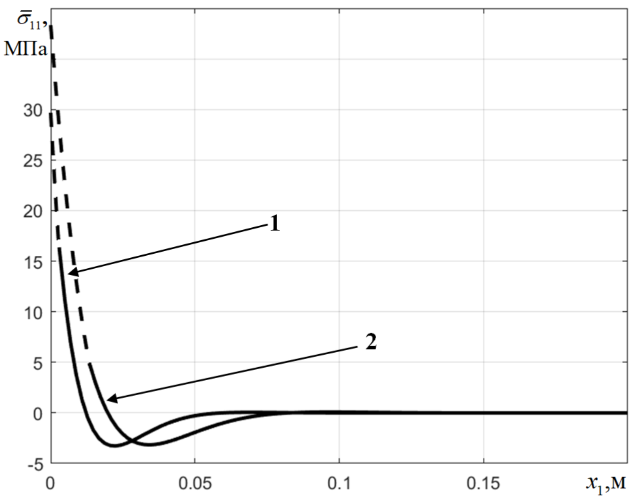


Рис. 5. Напряжения $\bar{\sigma}_{11}$

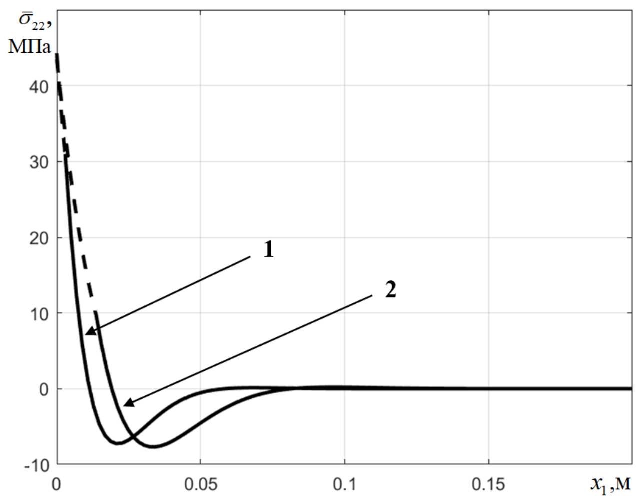


Рис. 6. Напряжения $\bar{\sigma}_{22}$

Из рис. 2–6 видно, что механические свойства адгезива и значение внешней нагрузки существенно влияют на значение перемещений и напряженное состояние в адгезионном слое. У умерено пластичного адгезива Araldite 2015 длина пластического участка составляет $\ell_p = 0.00294321$ м, а у пластичного полиуретана Sikaforce 7752 — $\ell_p = 0.01357304$ м, что в 4.6 раза больше, чем у Araldite 2015. Это обусловлено тем, что сила, обеспечивающая переход адгезионного слоя в состояние пластического деформирования, для Araldite 2015 равна $P = 911$ Н, для Sikaforce 7752 — $P = 534$ Н согласно статье [8].

Заключение

Из вариационной постановки задачи о равновесии двух тел, сопряженных слоем взаимодействия получена упругопластическая постановка задачи в дифференциальном виде. Показано общее аналитическое решение. Построены графики перемещений и напряжений в слое для адгезивов с различными механическими свойствами при внешней нагрузке, соответствующей ее экспериментальному значению при инициализации трещины в адгезиве.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Литература

1. *Prandtl L.* A thought model for the fracture of brittle solids / L. Prandtl, W. G. Knauss // International Journal of Fracture. – 2011. – Vol. 171, № 2. – P. 105–109.

2. *Ентов В. М.* К модели хрупкого разрушения Прандтля / В. М. Ентов, Р. Л. Салганик // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 87–99.

3. *Салганик Р. Л.* Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегающем горизонтальном пласте / Р. Л. Салганик, А. А. Мищенко, А. А. Федотов // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2015. – № 2. – С. 24–33.

4. *Макклинток Ф.* Пластические аспекты разрушения / Ф. Макклинток // Разрушение. – Москва : Мир, 1975. – Т. 3. – С. 67–262.

5. *Глаголев В. В.* Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев, А. А. Маркин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 3. – С. 22–34.

6. *Lopes R. M.* Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R.D.S.G. Campilho, F.J.G. da Silva, T.M.S. Faneco // Journal of Adhesion and Adhesives. – 2016. – Vol. 67. – P. 103–111.

7. *Богачева В. Э.* Исследование деформирования тонкого адгезионного слоя композита при воздействии нормальным отрывом / В. Э. Богачева // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – № 7. – С. 38–45.

8. *Богачева В. Э.* Исследование предела упругости тонкого адгезионного слоя композита при его нагружении нормальным отрывом / В. Э. Богачева // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 3 (57). – С. 67–74.

9. *Глаголев В. В.* Влияние пластических свойств тонкого адгезионного слоя на распределение зон пластичности и значения J-интеграла в состоянии плоской деформации / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев, А. А. Маркин // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29, № 1. – С. 115–131.

10. *Ишлинский А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – Москва : Физматлит, 2001. – 704 с.

11. *Mindlin R. D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates / R. D. Mindlin // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38.

12. Reissner E. On Bending of Elastic Plates / E. Reissner // Quarterly of Applied Mathematics. – 1947. – Vol. 5(1). – P. 55–68.

УДК 539.3

НАХОЖДЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ СЖАТОГО ИЗОТРОПНОГО ШАРА

О. В. Боницкая, А. Д. Бомбина

Тульский государственный университет

Аннотация. Проведено исследование процесса сжатия шара из изотропного материала нормальной нагрузкой, решен вопрос о количестве и ориентации датчиков для определения деформационного состояния.

Ключевые слова: сжатие шара, удлинение материального волокна, тензор деформации.

Для анализа структуры и свойств различных материалов проводят различного рода эксперименты. Чаще всего это эксперименты на растяжение — сжатие кубического образца для определения анизотропных [1, 2], изотропных и кубических материалов [3]. Также рассматривалось кручение цилиндра для определения ромбического, моноклинного и триклинного материала [4]. Некоторые виды материалов для определения требуют программы экспериментов сочетающих и растяжение — сжатие, и кручение [5].

Рассмотрим задачу сжатия шара нормальной нагрузкой. Определим возможно ли с помощью тензодатчиков, расположенных на поверхности шара найти его деформационное состояние. Предполагаем деформации малыми. Описывая процесс изменения длины волокна, будем решать вопрос о необходимом количестве датчиков и ориентации их на шаре.

Рассмотрим движение элементарного материального волокна, определяемого вектором $d\overline{x}$, соединяющим бесконечно близкие материальные точки. Квадрат длины элементарного материального вектор-волокна в начальный момент времени и в текущий определяются выражениями [6]:

$$dX^{2} = d\overline{X}\cdot\tilde{g}\cdot d\overline{X}, \qquad dx^{2} = d\overline{x}\cdot\tilde{G}\cdot d\overline{x}, \tag{1}$$

где $\tilde{g}$ и $\tilde{G}$ метрические тензоры в начальный и текущий момент времени.

Тензор деформаций Коши — Грина определяется как полу разность метрического тензора в текущий и начальный моменты:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\tilde{G}-\tilde{g}\right). \tag{2}$$

Напишем поле перемещения материальной точки в виде:

$$\overline{u} = u_1(x_1, x_2, x_3)\overline{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3)\overline{e}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3)\overline{e}_3. \tag{3}$$

Компоненты тензора малых деформаций через поле перемещений запишем в виде [6]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right), \tag{4}$$

где $\nabla_i u = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_k \Gamma^{j}_{ik}$.

Выражения для символов Кристофеля:

$$\Gamma^{j}_{ik} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}}\right), \tag{5}$$

где $g^{kl} = (g_{ij})^{-1}$.

Рассмотрим подвижный ортонормированный базис $\overline{e}_r$, $\overline{e}_\varphi$, $\overline{e}_\theta$ (рис.1). Вектор $\overline{e}_r$ направлен по радиусу, $\overline{e}_\varphi$, $\overline{e}_\theta$ — единичные вектора на сфере радиуса r, касательные к линиям $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ соответственно.

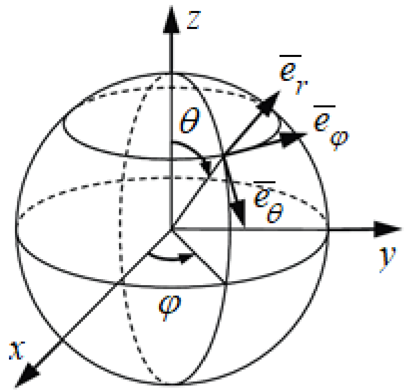


Рис. 1. Подвижный базис в сферической системе

Координаты материальной точки в сферической системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta\,. \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{6}$$

Дифференциалы координат в сферической системе будут представлены в виде:

$$\begin{aligned} dx &= \cos\varphi\sin\theta\, dr - r\sin\varphi\sin\theta\, d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\, d\theta \\ dy &= \sin\varphi\sin\theta\, dr + r\cos\varphi\sin\theta\, d\varphi + r\sin\varphi\cos\theta\, d\theta \\ dz &= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\ \ d\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Найдем квадрат длины дуги (1) в сферической системе координат:

$$d\mathrm{X}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2. \tag{8}$$

Компоненты евклидовой метрики и обратной ей в сферической системе координат будут записаны следующим образом:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Представим символы Кристофеля (5) в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} &\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \tilde{A}^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{r}, \ \ \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \\ &\Gamma^{r}_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta, \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \end{aligned} \tag{10}$$

остальные символы равны нулю.

Пусть поле перемещения (3) представлены одной компонентой

$$\bar{u} = u_r(r,\theta)\bar{e}_r. \tag{11}$$

Компоненты деформации (4) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \\ &\varepsilon_{r\varphi} = 0, \qquad \varepsilon_{rr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right), \quad \varepsilon_{\varphi\theta} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Относительное удлинение волокна в направлении единичного вектора $\bar{e}_r$ определяется выражением:

$$\varepsilon_l = \overline{e}_l \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \overline{e}_l. \quad (13)$$

В направлении $\overline{e}_\varphi = (0,1,0)$ удлинение волокна (13) можно найти в виде:

$$\varepsilon_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{u_r}{r}. \quad (14)$$

В направлении $\overline{e}_\theta = (0,0,1),$ получим:

$$\varepsilon_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{u_r}{r}. \quad (15)$$

Произвольное направление на поверхности сферы, описывается $\overline{e}_l = (0, \cos\alpha, \sin\alpha),$ где α это угол между направлением $\overline{e}_l$ и вектором $\overline{e}_\varphi$ в плоскости $\varphi,$ θ подвижного базиса. Тогда деформация волокна в данном направлении будет записана:

$$\varepsilon_l = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{u_r}{r}. \quad (16)$$

Если направление $\overline{e}_l = (0, \cos\alpha, \sin\alpha),$ а $\overline{e}_l = (0, \cos\beta, \sin\beta)$ в плоскости $\varphi,$ θ подвижного базиса, то угол между волокнами будет равен:

$$\cos\left(\overline{e}_l, \overline{e}_m\right) = \frac{\overline{e}_l \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \overline{e}_m}{\sqrt{\overline{e}_l \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \overline{e}_l}\sqrt{\overline{e}_m \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \overline{e}_{lm}}} = \cos\left(\alpha - \beta\right). \quad (17)$$

Таким образом, относительные удлинения вектор-волокна на поверхности сферы в любом направлении будут равны $\dfrac{u_r}{r},$ что не дает нам выяснить деформационное состояние сферы при нагружении через экспериментальные данные.

Расположим тензодатчик в направлении $\overline{e}_r = (1,0,0)$ по радиусу шара, изменение волокна будет найдено в виде:

$$\varepsilon_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial u_r}{\partial r}. \quad (18)$$

Выберем вектор $\overline{e}_\gamma = (\cos\gamma, 0, \sin\gamma)$ плоскости $r,$ θ под углом γ к обратному направлению вектора $\overline{e}_r,$ найдём изменение волокна:

$$\varepsilon_\gamma = \begin{pmatrix}\cos\gamma & 0 & \sin\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\gamma \\ 0 \\ \sin\gamma\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial u_r}{\partial r}\cos^2\gamma + \frac{u_r}{r}\sin^2\gamma - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\sin 2\gamma. \tag{19}$$

Таким образом, из уравнения (19) выведем зависимость:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = \frac{\dfrac{\partial u_r}{\partial r}\cos^2\gamma + \dfrac{u_r}{r}\sin^2\gamma - \varepsilon_\gamma}{\sin 2\gamma}. \tag{20}$$

Подставляя выражения (14) и (18) в уравнение (20), получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = \frac{\varepsilon_r\cos^2\gamma + \varepsilon_\varphi\sin^2\gamma - \varepsilon_\gamma}{\sin 2\gamma}. \tag{21}$$

Тензор деформации (12) через экспериментальные данные для изменения волокон (14), (18), (21) перепишем в виде:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & \dfrac{\varepsilon_r\cos^2\gamma + \varepsilon_\varphi\sin^2\gamma - \varepsilon_\gamma}{\sin 2\gamma} \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ \dfrac{\varepsilon_r\cos^2\gamma + \varepsilon_\varphi\sin^2\gamma - \varepsilon_\gamma}{\sin 2\gamma} & 0 & \varepsilon_\varphi \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Рассмотрим вектор $\overline{e}_\psi = (\cos\psi, \sin\psi, 0)$ плоскости r, φ под углом ψ к обратному направлению вектора $\overline{e}_r$, изменение волокна запишем следующим образом:

$$\varepsilon_\psi = \begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi \\ \sin\psi \\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{u_r}{r}\sin^2\psi + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\sin 2\psi. \tag{23}$$

Из уравнения (23) выведем зависимость:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = 2\frac{\dfrac{u_r}{r}\sin^2\psi - \varepsilon_\psi}{\sin 2\psi}. \tag{24}$$

Подставляя выражения (14) и (18) в уравнение (24), получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = 2\frac{\varepsilon_\varphi\sin^2\psi - \varepsilon_\psi}{\sin 2\psi}. \tag{25}$$

Найдем зависимость между удлинениями волок изотропного материала в разных направлениях, приравнивая выражения (21) и (25) в виде:

$$\frac{\varepsilon_r \cos^2\gamma + \varepsilon_\varphi \sin^2\gamma - \varepsilon_\gamma}{\sin 2\gamma} = 2\frac{\varepsilon_\varphi \sin^2\psi - \varepsilon_\psi}{\sin 2\psi}. \quad (26)$$

На сновании (26) можно оценивать правильность проведения эксперимента и применения модели среды.

В результате проведенной работы можно сделать вывод, что закон перемещения материальных точек в виде $\overline{u} = u_r(r,\theta)\overline{e}_r$ не может быть найден по измерениям, проведенным с помощью тензодатчиков на поверхности шара. Для определения деформационного состояния шара из изотропного материала при полярной нагрузке в точке нужно произвести три измерения, расположив тензодатчики: первый — на поверхности шара, второй — в направлении радиуса шара, третий — под углом в плоскости r, θ или в плоскости r, φ.

Литература

1. *Христич Д. В.* Численная симуляция экспериментов по определению типа начальной анизотропии упругого материала / Д. В. Христич, Д. А. Сухоруков, М. Ю. Соколова // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2021. – Т. 163, № 2. – С. 214–225. – DOI 10.26907/2541-7746.2021.2.214-225. – EDN VNACMR.

2. *Христич Д. В.* Критерий экспериментальной идентификации изотропного и кубического материалов // Изв. Тул. гос. ун-та. Естеств. науки. – 2012. – № 3. – С. 110–118.

3. *Христич Д. В., Каюмов Р. А., Мухамедова И. З.* Программа экспериментов по определению главных осей анизотропии материала // Изв. Казан. гос. архит.-строит. ун-та. – 2012. – № 3. – С. 216–224.

4. *Христич Д. В.* Критерий экспериментальной идентификации ромбического, моноклинного и триклинного материалов // Изв. Тул. гос. ун-та. Естеств. науки. – 2013. –№ 3. – С. 166–178.

5. *Христич Д. В.* Критерий экспериментальной идентификации гексагонального, тригонального и тетрагонального материалов // Вестн. Казан. гос. техн. ун-та им. А. Н. Туполева. – 2013. – № 2. – С. 67–72.

6. *Маркин А. А., Соколова М. Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 320 с.

УДК 539.3

ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА УТОЧНЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОСЕВОМ СЖАТИИ ЦИЛИНДРА С ЗАКРЕПЛЁННЫМИ ТОРЦАМИ

О. С. Голобоков[1], А. Л. Попов[1,2]

[1]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*
[2]*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет*

Аннотация. Рассмотрена задача о сжатии упругого цилиндра жесткими пластинами в осевом направлении. Предполагается, что торцы цилиндра не перемещаются относительно сжимающих пластин. Первое приближение решения получено с помощью разделения переменных, позволяющего точно удовлетворить граничным условиям по торцам и усредненно, либо в одном поперечном сечении — условиям на боковой поверхности цилиндра. Для уточнения решения используется итерационная процедура, состоящая в последовательном снятии невязок в напряжениях на боковой поверхности цилиндра, затем — в радиальном перемещении торцов, и, наконец, — в осевом перемещении. Выполнено сопоставление исходного и уточнённых аналитических решений с численным решением, полученным методом конечных элементов для различных коэффициентов Пуассона материала цилиндра.
Ключевые слова: упругий цилиндр, осевое сжатие, приближенное решение, уточнение, решение МКЭ, сравнение.

Введение

Упругие блоки широко используются в качестве виброизолирующих прокладок в различных механизмах и опорах строительных конструкций. В процессе эксплуатации они находятся, в основном, в условиях одноосного сжатия.

Изучение поведения упругих слоев, в частности, цилиндрической формы при осевом сжатии ранее было сконцентрировано на относительно несжимаемых материалах, к примеру, — резины, для которых предполагалось допущение о параболической форме выгиба боковой поверхности вдоль осевой координаты [1–3]. В работе [4] приводится приближённое решение задачи об осевом сжатии упругого цилиндра с закреплёнными торцами без введения гипотезы о параболичности боковой поверхности для материала с произвольным коэффициентом Пуассона. При этом условия отсутствия напряжений на свободной боковой поверхности цилиндра считаются выполненными в интегральном смысле. В предлагаемой работе подобное решение и решение, полученное при удовлетворении граничным условиям отсутствия напряжений на боковой поверхности в одном центральном поперечном сечении цилиндра, используются в качестве первого приближения итерационной процедуры, состоящей из нескольких шагов: снятии невязок в напряжениях на боковой поверхности цилиндра, затем — в радиальном перемещении торцов, и, наконец, — в осевом перемещении.

Постановка задачи

Рассматривается упругий цилиндр радиусом a и высотой h под воздействием одностороннего осевого сжатия на величину w_0. Цилиндр моделируется как линейно упругосжимаемый материал с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. Предполагается что торцы упругого цилиндра жестко закреплены на сжимающих пластинах. Нижняя пластина неподвижна, тогда как верхняя задает вертикальное смещение w_0. На рис. 1 показана расчетная схема сжатия цилиндра с зафиксированными торцами. Изогнутые штриховые линии показывают профиль деформации по бокам цилиндра при сжатии.

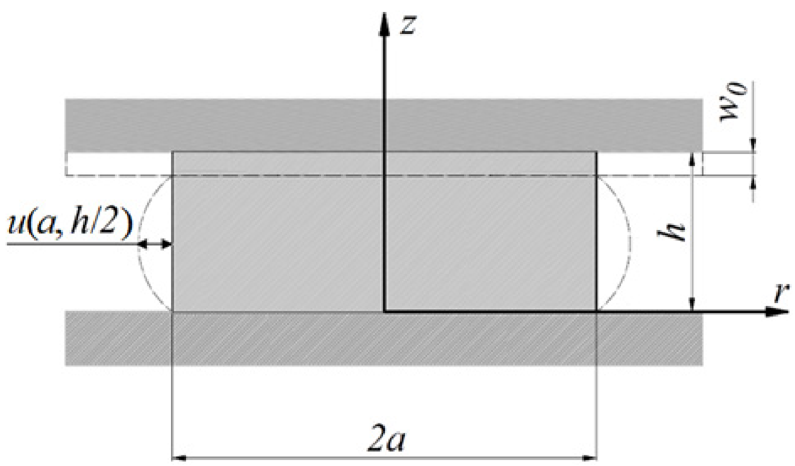


Рис 1. Расчетная схема сжатия цилиндра с зафиксированными торцами

Для решения задачи об осевом сжатии цилиндра может быть использована система уравнений Навье — Коши в осесимметричном случае в цилиндрической системе координат:

$$\begin{gathered}(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r}+\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}=0\\(1-\nu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\frac{1-2\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)=0\end{gathered}\qquad(1)$$

где u_r, u_z — перемещения в осевом и радиальном направлениях, ν — коэффициент Пуассона.

Граничные условия в данной постановке — при осевом сжатии цилиндра и условии непроскальзывания торцов относительно пластин, будут следующими:

$$\begin{aligned}&z=0: \quad u_r=u_z=0,\\&z=h: \quad u_r=0, \quad u_z=-w_1,\\&r=a: \quad \sigma_r=\tau=0,\end{aligned}\qquad(2)$$

где σ_r, τ — соответственно, радиальное и тангенциальное напряжения.

На первом шаге итерационной процедуры методом разделения переменных, подобно тому, как это сделано в [4], ищется выражение для радиального смещения:

$$u_r(r,z)=F(r)G(z),\qquad(3)$$

которое, после подстановки в систему (1) и интегрирования с учётом граничных условий (2) на торцах цилиндра позволяет определить также и осевое смещение с точностью до одной постоянной c_1:

$$u_r(r,z)=c_1 I_1\left(\frac{\alpha r}{h}\right)G_+(z),\qquad u_z(r,z)=c_1 I_0\left(\frac{\alpha r}{h}\right)G_-(z)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-w_0\frac{z}{h}\qquad(4)$$

$$G_\pm(z)=\left(1-\frac{z}{h}\right)\sin\frac{\alpha z}{h}\pm\frac{z}{h}\sin\left[\alpha\left(1-\frac{z}{h}\right)\right]$$

(параметр α в этих выражениях определяется через коэффициент Пуассона как положительный корень уравнения [4]):

$$\alpha=(3-4\nu)\sin(\alpha).\qquad(5)$$

Подстановка выражения (4) в соответствии с законом Гука в формулу для радиального напряжения и взятие её на боковой поверхности цилиндра (при $r=a$) позволяет определить постоянную c_1 как из интегрального условия: $\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_r(a,z)dz=0$, так и из условие равенства нулю радиального напряжения при конкретном значении координаты z на контуре одного из поперечных сечений боковой поверхности цилиндра, например, в середине высоты: $\sigma_r(a, h/2) = 0$. В результате, из интегрального условия получим:

$$c_1 = \frac{\nu(3-4\nu)w_0}{4(1-2\nu)Q_1}, \quad Q_1 = \frac{1}{2}\left[I_0(\omega) + (1-2\nu)I_2(\omega)\right], \quad \omega = \frac{\alpha a}{h}, \tag{6}$$

а из условия на контуре $r = a$ при $z = h/2$:

$$c_{11} = \frac{w_0(\alpha - 3\sin\alpha)\sin(\alpha/2)}{(\alpha - \sin\alpha)\left[(\alpha\cos\alpha - 3\sin\alpha)I_0(\omega) + \dfrac{h}{a}(1-\cos\alpha)I_1(\omega)\right]}. \tag{7}$$

Заметим, что, вследствие антисимметричного распределения сдвигового напряжения относительно центрального кругового сечения цилиндра, равенство $\dfrac{1}{h}\int\limits_0^h \tau(a,z)dz = 0,$ а также $\tau(a, h/2) = 0$ выполняются при любом значении постоянной c_1.

Полученные решения при обращении в ноль интегралов от радиального и тангенциального напряжений по высоте боковой поверхности цилиндра и обращении в ноль напряжений на контуре центрального кругового сечения цилиндра не гарантируют обращение их в ноль в любой точке этой поверхности. Образующиеся при этом невязки в напряжениях снимаются на втором шаге итерационной процедуры путём приложения к боковой поверхности цилиндра таких же напряжений, но с противоположными знаками. Следуя [5], представим распределения напряжений по боковой поверхности цилиндра, полученные на первом шаге итерационной процедуры, в форме разложений в тригонометрические ряды Фурье:

$$\begin{gathered} \sigma_r(a,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos\frac{2\pi n y}{h}, \quad \tau(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin\frac{2\pi n y}{h}, \quad y = z - \frac{h}{2} \\ p_n = \frac{2}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_r(a,y)\cos\frac{2\pi n y}{h}dy, \quad q_n = \frac{2}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \tau(a,y)\sin\frac{2\pi n y}{h}dy \end{gathered} \tag{8}$$

Выражение для функции радиального смещения боковой поверхности цилиндра при такой нагрузке имеет вид:

$$\begin{gathered} u_{II}(a,z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos\frac{2\pi n y}{h}, \quad u_n = \frac{a}{2G_0}\frac{\left(p_n - \delta_n q_n\right)\left(1-m\right) - m\beta_n q_n \gamma_n}{1 + m\left(\beta_n^2\gamma_n - 1\right)}, \\ \delta_n = \frac{I_0\left(\beta_n\right)}{I_1\left(\beta_n\right)}, \quad \gamma_n = \frac{1}{2}\left(\delta_n^2 - 1\right), \quad \beta_n = 2\pi n\frac{a}{h}, \quad G_0 = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}, \quad m = \frac{1}{\nu}. \end{gathered} \tag{9}$$

Выражение для функции добавочного осевого перемещения w_{II} при компенсирующем давлении на боковую поверхность цилиндра имеет вид, похожий на (9), но представляется рядом по $\sin\dfrac{2\pi n y}{h}$. При этом на торцах цилиндра $w_{II} = 0$, т. е. это решение не создаёт дополнительных перемещений торцов цилиндра в осевом направлении. В то же время выравнивающий эффект в напряжениях на боковой поверхности сопровождается возникновением добавочных радиальных перемещений, которые, как следует из (9), не обращаются в нуль на торцах цилиндра.

Устранение полученной невязки в радиальных перемещениях осуществляется на третьем шаге процедуры путём растяжения цилиндра равномерно распределёнными по торцам нормальными напряжениями, считая торцы свободными от закреплений. В соответствии с эффектом Пуассона, осевое растяжение незакреплённого по торцам цилиндра сопровождается равномерным сжатием его боковой поверхности. Решение такой задачи приведено во многих книгах по теории упругости. Есть оно также и в [5]. В математическом плане оно относится к элементарным решениям. При таком растяжении отлично от нуля только осевое напряжение $\sigma_{zIII} = \sigma_0$. Выражения для деформаций в этом случае (индекс III опускаем):

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_0}{E}, \quad \varepsilon_r = -\nu\frac{\sigma_0}{E}, \quad \gamma_{rz} = 0,$$

а, полученные по ним, перемещения:

$$w_{III} = \frac{\sigma_0}{E}\left(z - \frac{h}{2}\right), \quad u_{III} = -\nu\frac{\sigma_0}{E}r\ . \tag{10}$$

Величину растягивающего напряжения σ_0 подберём такой, чтобы сокращение радиального размера цилиндра было равно радиальному перемещению контура торцов цилиндра с противоположным знаком: $u_{III}(a) = -u_{II}(a,0) = -u_{II}(a,h)$. При этом образуется невязка в осевых перемещениях цилиндра, которая для торца $z = h$ будет равна:

$$w_{III}(h) = \frac{h}{2\nu a}u_{II}\left(a,h\right). \tag{11}$$

В итоге, на четвёртом шаге итерационной процедуры приходим к исходной задаче об осевом сжатии цилиндра, но не на величину w_0, а на $w_{IV} = w_0 - w_{III}(h)$.

Конкретную реализацию шагов процедуры проиллюстрируем для вытянутого цилиндра с параметрами: $a = 20$ *мм*, $h = 100$ *мм*, $w_0 = 10$ *мкм*. Модуль упругости принимался равным 800 *МПа*, коэффициент Пуассона задавался в интервале $(0{,}01 \div 0{,}5)$. Для этих параметров строилось также численное решение задачи с использованием программного комплекса ANSYS в подпрограмме workbench mechanical.

На рис. 2 приведены графики изменения значения перемещения $\mathbf{u_{max}} = u_r(a, h/2)$ в мкм в зависимости от коэффициента Пуассона. Сплошными линиями показаны значения перемещения, полученные по результатам расчётов МКЭ, штрихпунктирными — при интегральном определении постоянной c_1, ромбиками — при определении постоянной из равенства нулю радиального напряжения в центральном сечении боковой поверхности цилиндра. Слева приведены значения, рассчитанные по формулам (4)–(7), справа — уточнённые значения для случая точечного определения постоянной c_1.

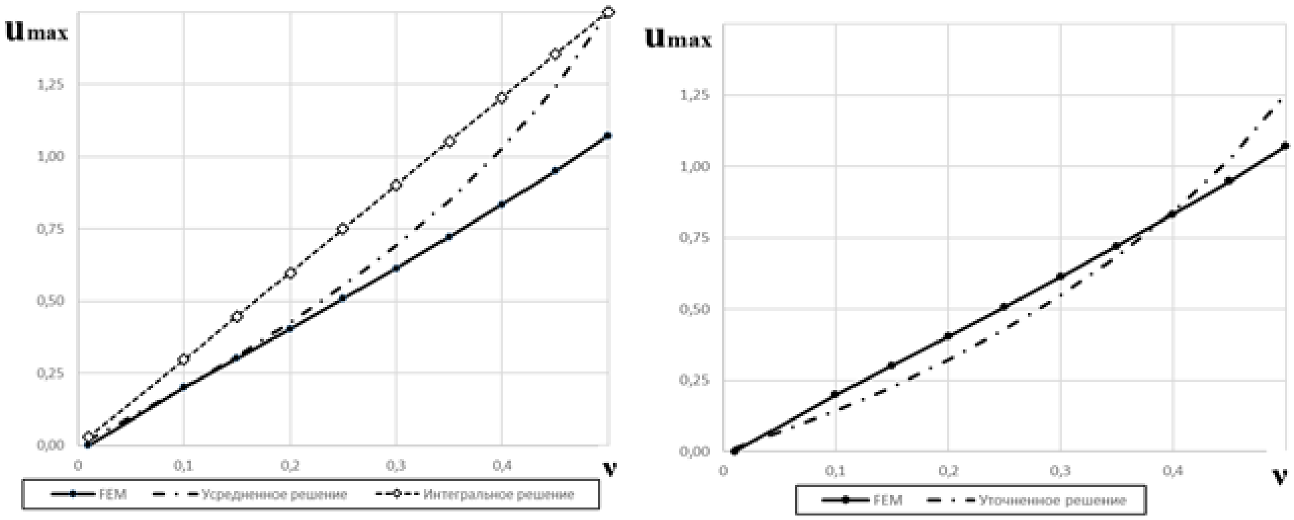


Рис. 2. Зависимость максимального радиального перемещения боковой поверхности цилиндра от коэффициента Пуассона: слева — расчёт по формулам (4)–(7), справа — уточнённые значения для случая точечного определения постоянной c_1

Из приведенных графиков видно, что для вытянутого цилиндра уже первое приближение аналитического решения для максимального радиального перемещения его боковой поверхности, полученное для точечного условия, имеет меньшее отклонение от численного решения, чем при выполнении интегрального условия отсутствия радиального напряжения на боковой поверхности цилиндра. Однако с ростом коэффициента Пуассона это отклонение нарастает, достигая тех же значений, что и при интегральном условии, для материалов, близких к несжимаемым. Проведённое уточнение сглаживает эти отклонения для высоких значений коэффициента Пуассона. Следует отметить, что внимание, уделяемое уточнённому определению радиального перемещения поверхности цилиндра в центральном сечении, вызвано возможностью использования этого значения для решения обратной задачи нахождения коэффициента Пуассона по измерению максимального перемещения боковой поверхности цилиндра при его осевом сжатии.

Благодарности

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации 124012500437-9).

Литература

1. *Al-Chalabi M., Huang C.* Stress distribution within circular cylindres in compression // Int. J. Rock Mech, Mining Sci. Geomech, Abstr. – 1974. – P. 45–56.

2. *Gent A., Lindley P.* The compression of bonded rubber blocks. Proc. Inst.Mech. Eng. – 1959. – 173. – P. 111–122.

3. *Gent A. N., Meinecke E. A.* Compression, bending, and shear of bonded rubberblocks. Polym. Eng. Sci. 1970. – 10. – P. 48–53.

4. *Qiao S., Lu N.* Analytical solutions for bonded elastically compressible layers // Int. J. Solids Struct. – 2015. – Vol. 58. – P. 353–365. – doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.11.018.

5. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – М. : ГИТТЛ, 1955. – 491 с.

УДК 534.11

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФИЗИЧЕСКИХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ БАЛОЧНОГО МАЯТНИКА

Е. А. Дегилевич[1,2], А. С. Смирнов[2,3]

[1]*ООО «Газпромнефть – Промышленные Инновации»*
[2]*Институт проблем машиноведения Российской академии наук*
[3]*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

Аннотация. В работе рассматриваются конечномерные физические модели балочного маятника, состоящие из одного, двух и трех стержней. Для каждой модели проводится аналитическое решение с определением собственных частот колебаний системы. Полученные формулы для обезразмеренных частот иллюстрируются в виде графиков зависимости этих частот от параметра, характеризующего соотношение между упругими и гравитационными свойствами балочного маятника. Также приводятся графики зависимости аналогичных частот распределенной модели для сопоставления с рассматриваемыми конечномерными моделями. Полученные результаты имеют теоретическую ценность и представляют интерес для конкретных прикладных задач, связанных с моделированием цепных систем.
Ключевые слова: балочный маятник, цепной маятник, колебания, собственные частоты, распределенная модель, конечномерная модель, стержневая модель.

Введение

Исследованию цепных систем и балочных конструкций, обладающих бесконечным числом степеней свободы, посвящено внушительное количество научных работ [1–5]. Это во многом связано с тем, что в повседневной жизни достаточно часто можно встретить объекты, которые удается с некоторыми допущениями описать уравнениями из известных моделей цепей или балок. Так, колебания подвесных веревочных мостов, проводов линий электропередач (ЛЭП), цепных оград описываются уравнениями колебаний цепной линии [1, 2]. Если же рассматривать подвешенный за один конец канат, шнур, цепочку или трос, то можно обратиться к уравнениям колебаний цепного маятника (ЦМ) [6]. Однако классические цепные модели наделяются идеальной гибкостью и нерастяжимостью, вследствие чего имеется несомненный практический интерес в усовершенствовании таких моделей, поскольку в реальности тросы, канаты и провода имеют некоторую жесткость на изгиб и на растяжение. Такое уточнение модели поможет учесть упругие свойства, которые могут вносить существенные изменения в динамику изучаемого объекта.

Как известно, зачастую усложнение модели приводит к невозможности построения для нее точного аналитического решения, которое существует для классических моделей с распределенными параметрами, что в свою очередь влечет за собой необходимость использования численных процедур или подталкивает к применению самых разнообразных конечномерных моделей. Исходя из этого, настоящая работа посвящена динамическому анализу нерастяжимого балочного маятника (БМ), который отличается от модели ЦМ учетом изгибной жесткости [7]. В качестве конечномерных физических моделей рассматриваются стержневые модели, которые себя отлично зарекомендовали при описании цепных систем [6]. Эти модели обладают достаточной простотой, однако при этом они не только дают весьма хорошие приближения к исходным распределенным моделям в плане точности результатов, но и позволяют реализовывать масштабные сложные цепные конструкции в программных пакетах для моделирования многотельной кинематики и динамики.

1. Распределенная модель

Рассмотрим сначала исходную модель БМ с распределенными параметрами (рис. 1). Уравнение колебаний БМ в рамках этой модели имеет вид [8]:

$$\rho F\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=-EJ\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\rho Fg\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(L-x\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right], \tag{1}$$

где x — продольная координата, t — время, v — поперечное перемещение сечения балки, L — длина балки, F — площадь сечения балки, J — момент инерции сечения балки, ρ — плотность материала балки, E — модуль Юнга материала балки, g — ускорение свободного падения. Если разыскивать решение уравнения (1) в виде $v(x,t)=V(x)\sin(kt+\alpha)$, то после подстановки этого решения в (1) данное уравнение можно преобразовать к виду:

$$EJ\frac{d^4V}{dx^4}-\rho Fg\frac{d}{dx}\left[\left(L-x\right)\frac{dV}{dx}\right]-k^2\rho FV=0. \tag{2}$$

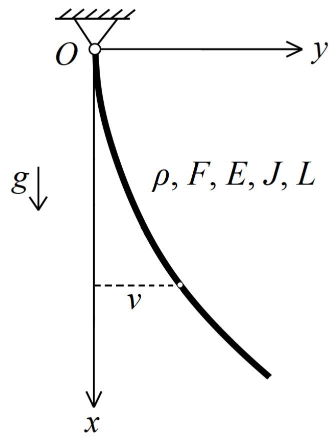


Рис. 1. Распределенная модель БМ

Введем безразмерные величины: продольную координату ξ; параметр δ, определяющий соотношение упругих и гравитационных свойств БМ; а также частоту p:

$$\xi=\frac{x}{L},\quad \delta=\frac{EJ}{\rho FgL^3},\quad k=p\sqrt{\frac{g}{L}}=p\sqrt{\frac{EJ}{\rho FgL^4\delta}}. \tag{3}$$

Тогда уравнение (2) для амплитудной функции $V(x)$ примет вид:

$$\delta V^{IV}-(1-\xi)V''+V'-p^2V=0, \tag{4}$$

где штрихом обозначается производная по безразмерной координате ξ. Рассматривая оба предельных значения параметра δ, можно видеть, что при малых δ уравнение (4) переходит в уравнение, отвечающее классическому ЦМ [6], а при больших δ — в уравнение классической балки Бернулли — Эйлера [3] без учета силы тяжести, как этого и следовало ожидать:

$$\delta\to 0:\quad \left[\left(1-\xi\right)V'\right]'+k^2\frac{L}{g}V=0;\quad \delta\to\infty:\quad V^{IV}-k^2\frac{\rho FL^4}{EJ}V=0. \tag{5}$$

В общем случае уравнение (4) не допускает построения точного аналитического решения, и для его анализа следует прибегнуть к численным процедурам.

2. Конечномерные модели

Рассмотрим конечномерные модели БМ, основанные на использовании стержневых схем. Физическая конечномерная модель представляет собой n одинаковых стержней длиной

$l = L/n$ и массой $m = \rho FL/n = \rho Fl$ каждый, соединенных шарнирно друг с другом. Для учета изгибной жесткости в местах шарнирного соединения стержней помещаются упругие торсионы с крутильной жесткостью 2γ. Поэтому при последовательном соединении торсионов в месте стыковки соседних стержней будет располагаться торсион с результирующей жесткостью γ, а в месте расположения неподвижного шарнира останется торсион жесткостью 2γ, однако ясно, что он не будет играть какой-либо роли, поэтому на расчетных схемах его можно не приводить. Крутильная жесткость γ должна быть равна жесткости на поворот одного участка балки длиной l в рамках рассмотренной ранее модели с распределенными параметрами, а значит, $\gamma = EJ/l$ [9]. В качестве обобщенных координат удобно принять углы отклонения стержней φ_i от вертикальной оси. На рис. 2 показаны конечномерные модели БМ с одним ($n = 1$, рис. 2, а), двумя ($n = 2$, рис. 2, б) и тремя ($n = 3$, рис. 2, в) стержнями.

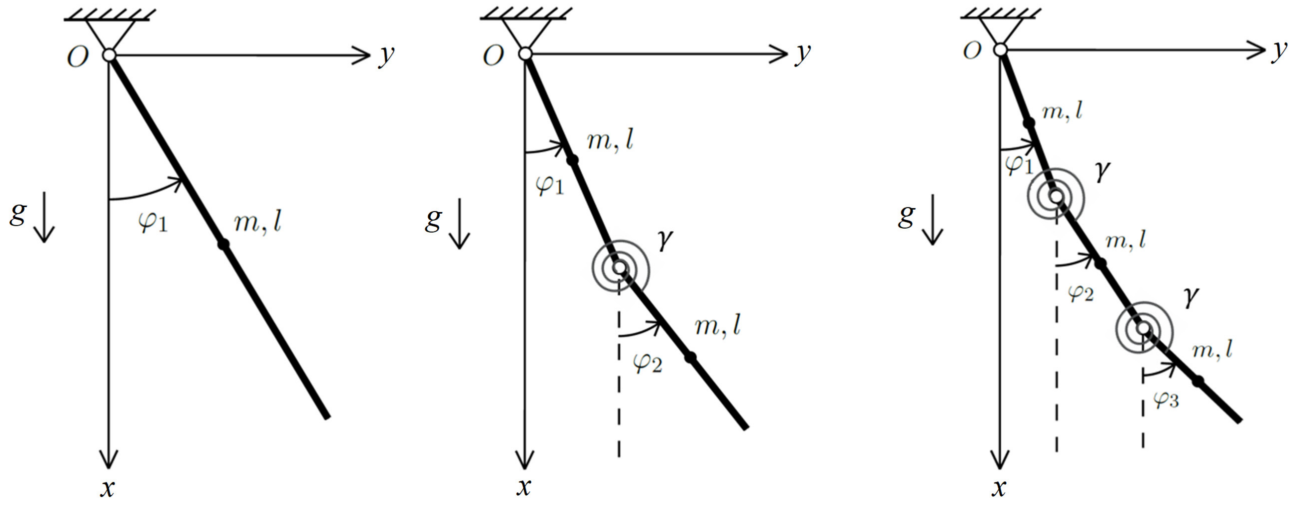


Рис. 2. Конечномерные модели БМ с: а) одним, б) двумя, в) тремя стержнями

Для того чтобы иметь возможность сравнивать частоты конечномерных моделей с частотами исходной распределенной модели, следует связать жесткость γ с введенным ранее параметром δ. На основе формулы (3) для δ и выражения $\gamma = EJ/l$ получаем следующую связь между этими параметрами:

$$\gamma = n^3 \delta mgl. \tag{6}$$

2.1. Одностержневая модель

Рассмотрим сначала модель, состоящую из одного стержня длиной $l = L$ (рис. 2, а). Поскольку торсионов в данной схеме нет, то эта модель БМ оказывается идентичной одностержневой модели ЦМ. Ясно, что кинетическая и потенциальная энергии этой системы в квадратичной аппроксимации будут иметь вид [6]:

$$T = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}_1^2, \quad \Pi = \frac{1}{2}\frac{mgl}{2}\varphi_1^2. \tag{7}$$

Отсюда следует, что инерционный и квазиупругий коэффициенты определяются формулами

$$a = \frac{1}{3}ml^2, \quad c = \frac{1}{2}mgl, \tag{8}$$

а частота малых колебаний в рамках рассматриваемой модели с одной степенью свободы и отвечающая ей безразмерная частота будут постоянными величинами, не зависящими от δ:

$$k_1 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{g}{L}}, \quad p_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}. \tag{9}$$

2.2. Двухстержневая модель

Рассмотрим теперь модель, состоящую из двух стержней длиной $l = L/2$ (рис. 2, б). Тогда кинетическая энергия при удержании лишь квадратичных слагаемых будет [6]:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{4}{3}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2]^{\mathrm{T}}$ — столбец обобщенных координат. Что же касается потенциальной энергии, то она в квадратичной аппроксимации имеет следующий вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl\left(\frac{3}{2}\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\varphi_2^2\right) + \frac{1}{2}\gamma\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2\right), \tag{11}$$

где отброшена несущественная аддитивная постоянная. Выражение (11) можно преобразовать с помощью формулы (6), положив для двухстержневой модели $n = 2$:

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl\left[\left(\frac{3}{2} + 8\delta\right)\varphi_1^2 + \left(\frac{1}{2} + 8\delta\right)\varphi_2^2 - 16\delta\varphi_1\varphi_2\right] = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}. \tag{12}$$

На основе формул (10) и (12) получаем выражения для матрицы инерционных коэффициентов $\mathbf{A}$ и матрицы квазиупругих коэффициентов $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} = ml^2\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = mgl\begin{bmatrix} \frac{3}{2} + 8\delta & -8\delta \\ -8\delta & \frac{1}{2} + 8\delta \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Подставляя выражения (13) в частотное уравнение $\det\left(\mathbf{C} - k^2\mathbf{A}\right) = 0$ и переходя к безразмерной частоте p согласно последней формуле (3), а также принимая во внимание, что $l = L/2$, получим следующее биквадратное уравнение:

$$7p^4 - \left(1536\delta + 84\right)p^2 + 2304\delta + 108 = 0. \tag{14}$$

Решая данное уравнение, находим безразмерные частоты колебаний для рассматриваемой модели с двумя степенями свободы как функции параметра δ:

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{7}\left(768\delta + 42 \pm 12\sqrt{4096\delta^2 + 336\delta + 7}\right)}. \tag{15}$$

2.3. Трехстержневая модель

Наконец, рассмотрим конечномерную модель, состоящую из трех стержней длиной $l = L/3$ (рис. 2, в). Кинетическая энергия с учетом лишь квадратичных слагаемых есть [6]

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{7}{3}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{4}{3}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}_3^2 + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3\right) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{16}$$

где $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^{\mathrm{T}}$ — столбец обобщенных координат. Потенциальную энергию трехстержневой модели БМ в квадратичной аппроксимации можно записать в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl\left(\frac{5}{2}\varphi_1^2 + \frac{3}{2}\varphi_2^2 + \frac{1}{2}\varphi_3^2\right) + \frac{1}{2}\gamma\left(\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_3\right), \tag{17}$$

где, как и прежде, отброшена аддитивная постоянная, не играющая роли. С помощью формулы (6), положив теперь в ней $n = 3$, преобразуем выражение (17) к виду:

$$\Pi = \frac{1}{2} mgl \left[\left(\frac{5}{2} + 27\delta \right) \varphi_1^2 + \left(\frac{3}{2} + 54\delta \right) \varphi_2^2 + \left(\frac{1}{2} + 27\delta \right) \varphi_3^2 - 54\delta\varphi_1\varphi_2 - 54\delta\varphi_2\varphi_3 \right] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}. \quad (18)$$

Тогда матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов согласно (16) и (18) будут:

$$\mathbf{A} = ml^2 \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = mgl \begin{bmatrix} \frac{5}{2} + 27\delta & -27\delta & 0 \\ -27\delta & \frac{3}{2} + 54\delta & -27\delta \\ 0 & -27\delta & \frac{1}{2} + 27\delta \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Подставляя выражения (19) в частотное уравнение $\det(\mathbf{C} - k^2\mathbf{A}) = 0$ и вновь переходя к безразмерной частоте p, а также учитывая, что теперь $l = L/3$, получим следующее бикубическое уравнение:

$$\begin{gathered} 26p^6 - \left(60264\delta + 1107\right)p^4 + \left(12754584\delta^2 + 839808\delta + 9072\right)p^2 - \\ -19131876\delta^2 - 1102248\delta - 10935 = 0. \end{gathered} \quad (20)$$

Это уравнение оказывается слишком громоздким для построения его аналитического решения, поэтому гораздо проще прибегнуть здесь к численному поиску корней.

3. Сравнение результатов

Для сопоставления результатов исследования исходной распределенной модели колебаний БМ и трех конечномерных физических моделей построим графики зависимости безразмерных частот от параметра δ, которые приведены на рис. 3.

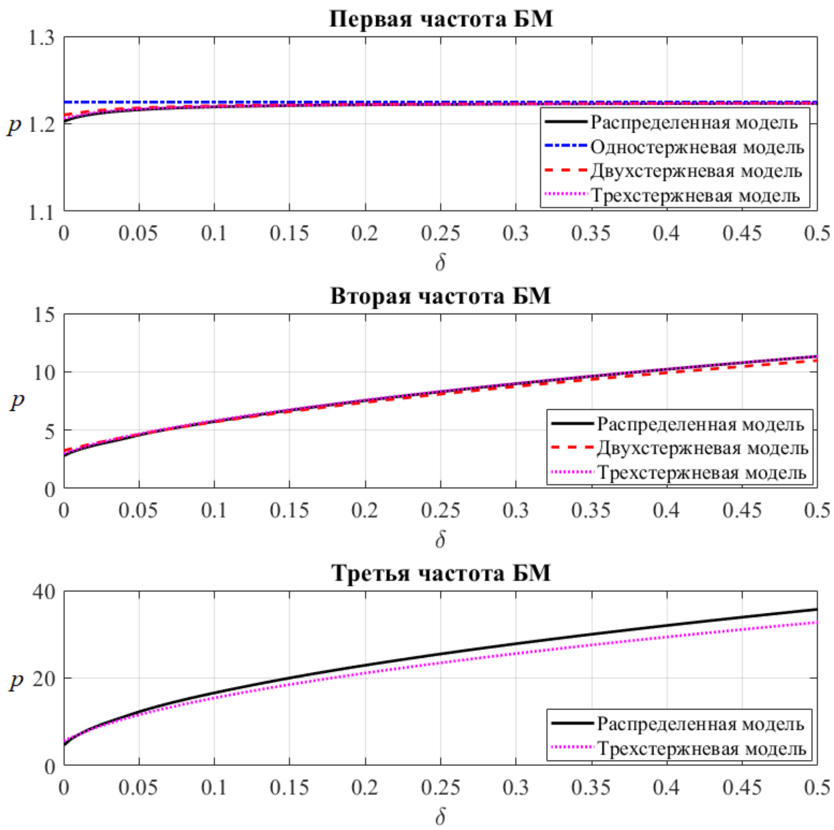


Рис. 3. Графики зависимости безразмерных частот колебаний p_1, p_2 и p_3 от параметра δ для различных моделей

Ясно, что при малых значениях параметра δ первые три безразмерные частоты БМ стремятся к частотам классического ЦМ, которые равны 1.202, 2.760 и 4.327 [6]. Для двухстержневой схемы первая и вторая частоты при $\delta \to 0$ равны 1.210 и 3.246, т. е. они больше точных значений на 0.67 % и 17.6 % соответственно, а для трехстержневой схемы при $\delta \to 0$ безразмерные частоты колебаний будут равны 1.206, 3.000 и 5.668, т. е. они оказываются большими, чем точные величины, на 0.3 %, 8.7 % и 31 % соответственно.

В предельном случае $\delta \to \infty$, когда преобладают упругие характеристики, частоты БМ стремятся уже к частотам классической балки без учета силы тяжести. Как известно, для модели колебаний балки с распределенными параметрами, имеющей один шарнирно закрепленный, а другой свободный конец, первые три безразмерные частоты будут равны 0, 15.418 и 49.965 [3]. Из последней формулы (3) следует, что для получения безразмерных частот в стандартных терминах колебаний балок частоты БМ p необходимо поделить на $\sqrt{\delta}$ и совершить предельный переход при $\delta \to \infty$ [7]. Так, выполняя данную процедуру для двухстержневой модели на основе формул (15), можно получить значения, равные 0 и 14.813. Первая нулевая частота, очевидно, полностью совпадает с результатом из распределенной модели, тогда как вторая частота оказывается меньшей точного значения на 3.9 %. Рассматривая аналогичный предельный переход для трехстержневой модели при применении численных процедур к уравнению (20), можно получить следующие значения: 0, 15.349 и 45.632. Видно, что вторая частота здесь меньше точного значения уже всего на 0.45 %, а третья — на 8.7 %.

Отметим, что полученные процентные отклонения результатов, полученных в рамках конечномерных физических моделей, от аналогичных результатов из распределенной модели оказываются несколько более ощутимыми по сравнению с конечномерными математическими моделями, рассмотренными в работе [7], хотя они являются вполне приемлемыми.

Заключение

В настоящей работе были рассмотрены малые колебания исходной распределенной и трех физических конечномерных моделей БМ. Для модели с распределенными параметрами было приведено уравнение динамики, с помощью которого численными методами были получены частоты колебаний, совпадающие с частотами колебаний ЦМ в предельном случае $\delta \to 0$ (т. е. при отсутствии жесткости на изгиб) и частотами колебаний балки Бернулли — Эйлера при $\delta \to \infty$ (т. е. при отсутствии силы тяжести). Конечномерные модели использовали стержневые схемы с одним, двумя и тремя стержнями, соединенными шарнирами и упругими торсионами. Для каждой конечномерной модели были найдены частотные уравнения, а отвечающие им частоты, приведенные в удобной графической форме, дали хорошее приближение к низшим частотам распределенной модели, несмотря на относительно малое количество стержней. Полученные результаты могут оказаться полезными для дальнейших исследований, посвященных цепным системам, а также они представляют практический интерес для прикладных задач, требующих упрощенного моделирования объектов с распределенными параметрами, применения моделей с сосредоточенными параметрами и расчетов с желаемой точностью.

Литература

1. *Меркин Д. Р.* Введение в механику гибкой нити / Д. Р. Меркин. – Москва : Наука, 1980. – 240 с.

2. *Лурье А. И.* Аналитическая механика / А. И. Лурье. – Москва : Физматгиз, 1961. – 824 с.

3. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний : учебник для вузов / В. Л. Бидерман. – Москва, Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 414 с.

4. *Бабаков И. М.* Теория колебаний : учеб. пособие / И. М. Бабаков. – 4-е изд., испр. Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.

5. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – Москва : Наука, 1967. – 444 с.

6. *Смирнов А. С.* Колебания цепных систем : учеб. пособие / А. С. Смирнов, Е. А. Дегилевич. – Санкт-Петербург : Политех-пресс, 2021. – 246 с.

7. *Дегилевич Е. А.* Динамический анализ балочного маятника / Е. А. Дегилевич, А. С. Смирнов // X Поляховские чтения : материалы международной научной конференции по механике. Санкт-Петербург, 23–27 сентября 2024 года. – Санкт-Петербург : ООО «Издательство ВВМ», 2024. – С. 86–90.

8. *Динник А. Н.* Устойчивость упругих систем / А. Н. Динник. – Москва : ОНТИ НКТА СССР, 1935. – 186 с.

9. *Исполов Ю. Г.* Вычислительные методы в теории колебаний : учеб. пособие / Ю. Г. Исполов. – Санкт-Петербург : изд-во Политехнического ун-та, 2008. – 124 с.

УДК 539.375

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ В СМЕШАННЫХ РЫХЛЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ

А. В. Дробышева, А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается динамическое деформирование сферической полости в невесомом полупространстве. Полупространство моделируется многокомпонентной упруговязкопластической средой. Дана постановка задачи для многокомпонентной среды. В рамках осесимметричного состояния получены напряжения и перемещения в упругой и пластической областях, уравнение для определения упругопластической границы и соотношение для определения комбинации нагрузок, при которых возникает пластическое деформирование полости при заданных физико-механических и геометрических параметрах.
Ключевые слова: упруговязкопластичность, многокомпонентная среда, осесимметричное состояние, динамическое деформирование, деформирование полупространства, сферическая полость, модель Спорыхина, напряжения, деформации, упругопластическая граница.

Введение

Известно [1–3], что подземные полости сферической формы широко используются в хозяйственной деятельности, в частности, для хранения различного сырья (газ, нефть и т. д.). Поэтому расчет их поведения при воздействии динамических нагрузок имеет большое значение при проектировании и прогнозировании чрезвычайных ситуаций. Имеющиеся в литературе решения [4] аналогичной задачи получены для упруговязкопластического (EVP) тела Спорыхина (S_p) [3], что характерно для скальных горных пород [5].

В настоящей работе в отличии от работы [4] горный массив в области пластического деформирования моделируется EVP многокомпонентным телом S_p^α [6–8], что, как представляется, характерно для смешанных рыхлых горных пород [5].

1. Постановка задачи динамического деформирования сферической полости в невесомом упруговязкопластическом полупространстве

Ниже в квазистатической постановке рассматривается деформирование сферической полости радиуса a в невесомом полупространстве. По контуру полости равномерно распределена нагрузка P, например, давление газа на породный контур при взрыве, а на бесконечности действует нагрузка q, выражения для которых имеют вид

$$P = P_0 e^{\hat{a}t}, \quad q = q_0 = gh, \quad t_* \le t \le t_0,$$

где g — средний объемный вес вышележащих пород, h — глубина заложения полости, $\hat{a}$ — известная константа.

Согласно [6], приведем соотношения, которые полностью определяют свойства обобщенной модели S_p^α.

Тело остается упругим

$$S_{ij}S^{ij} < k_1^2, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad k_1 \ge k_2 \ge \ldots \ge k_\alpha, \tag{1.1}$$

где S_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений. При этом для последовательно соединенных моделей S_p^α

$$S_{ij}^{e\alpha} = 2\mu_\alpha \varepsilon_{ij}^{e\alpha}\ , \quad \varepsilon_{kk}^{e\alpha} = 0\ , \quad \forall \alpha = 1, 2, \ldots, L, \tag{1.2}$$

где μ_α — параметры Ламе.

Если $S_{ij}S^{ij} \geq k_1^2$, то полная деформация слагается из упругой и пластической

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 + \ldots + \varepsilon_{ij}^L = \varepsilon_{ij}^{e1} + \varepsilon_{ij}^{p1} + \varepsilon_{ij}^{e2} + \varepsilon_{ij}^{p2} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{eL} + \varepsilon_{ij}^{pL}, \tag{1.3}$$

здесь $\varepsilon_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^2, \ldots, \varepsilon_{ij}^L$ — деформации, соответственно, первой, второй и так далее моделей S_p^α.

Пластическая составляющая объемной деформации моделей удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{kk}^{p\alpha} = 0\ , \quad \alpha = 1, 2, \ldots, L\ . \tag{1.4}$$

Следовательно, компоненты девиатора тензора деформации тождественно равны компонентам тензора деформации $\varepsilon_{ij}^{p\alpha}$.

Напряжения, приложенные к моделям, одинаковы, тогда

$$S_{ij}^1 = S_{ij}^2 = \ldots = S_{ij}^L = S_{ij}\ , \quad \left(\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \ldots = \sigma_{ij}^L = \sigma_{ij}\right). \tag{1.5}$$

Тензоры скоростей пластической деформации $e_{ij}^{p\alpha}$ связаны с тензором напряжений соотношениями ассоциированного закона течения

$$e_{ij}^{p\alpha} = \psi_\alpha \left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{ij}^{p\alpha}\right), \quad \forall \alpha = 1, 2, \ldots, L, \tag{1.6}$$

если выполняются условия пластичности

$$\left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{ij}^{p\alpha}\right)\left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{ij}^{p\alpha}\right) = k_\alpha, \quad \forall \alpha = 1, 2, \ldots, L, \tag{1.7}$$

где η_α — коэффициент вязкости, c_α — коэффициент упрочнения, k_α — предел текучести, ψ_α — положительный скалярный множитель.

Полные деформации удовлетворяют формулам Коши

$$2\varepsilon_{ij} = w_{i,j} + w_{j,i}. \tag{1.8}$$

Уравнениям равновесия удовлетворяют только действительные напряжения

$$\sigma_{ij,j} = 0. \tag{1.9}$$

Таким образом, уравнения (1.1)–(1.8) с уравнениями равновесия (1.9) представляют собой систему уравнений, описывающих деформированное поведение EVP среды произвольного порядка.

2. Осесимметричное состояние многокомпонентного EVP массива со сферической полостью в сферической системе координат

Напряженно-деформированное состояние массива в осесимметричном случае $(\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi)$ определяется согласно (1.9) уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

законом Гука (1.2), соотношениями Коши (1.7).

И для упругой области будем иметь

$$w^e = \frac{C_1}{r^2}\ , \quad \sigma_r^e = -4\mu\frac{C_1}{r^3} + C_2\ , \quad \sigma_\theta^e = 2\mu\frac{C_1}{r^3} + C_2.$$

Из условия отсутствия объемного расширения в пластической зоне (1.4) получаем

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{dw_2}{dr} + 2\frac{w_2}{r} = 0.$$

Откуда

$$w^p = \frac{B_1}{r^2}\ , \quad \varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_r}{2}. \tag{2.1}$$

Из ассоциированного закона пластического течения (1.6) имеем

$$e_r^{p\alpha} = \psi_\alpha \left(S_r - c_\alpha \varepsilon_r^{p\alpha} - \eta_\alpha e_r^{p\alpha} \right), \quad e_\theta^{p\alpha} = \psi_\alpha \left(S_\theta - c_\alpha \varepsilon_\theta^{p\alpha} - \eta_\alpha e_\theta^{p\alpha} \right),$$

$$e_\varphi^{p\alpha} = \psi_\alpha \left(S_\varphi - c_\alpha \varepsilon_\varphi^{p\alpha} - \eta_\alpha e_\varphi^{p\alpha} \right), \quad \forall \alpha = 1, 2, \ldots, L.$$

Так как $\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\varphi^p$, то из этих равенств следует, что $S_\theta = S_\varphi$, $S_\theta = -{}^{S_r}\!/_2$.

Функция нагружения (1.7) принимает вид

$$\left(S_r - c_\alpha \varepsilon_r^{p\alpha} - \eta_\alpha e_r^{p\alpha} \right) = K_\alpha^2, \quad K_\alpha = \frac{k_\alpha}{\sqrt{3}}, \quad \forall \alpha = 1, 2, \ldots, L. \tag{2.2}$$

Согласно (1.2) и (1.3) будем иметь

$$\varepsilon_r = \sum_{\alpha=1}^{L} \varepsilon_r^{e\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{L} \varepsilon_r^{p\alpha} = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \quad S_r = \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{1}{\mu_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{L} e_r^{e\alpha} = e_r^e,$$

$$2\mu_\alpha \varepsilon_r^{e\alpha} = S_r^\alpha, \quad \forall \alpha = 1, 2, \ldots, L, \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_r^{e\alpha} = \varepsilon_r - \varepsilon_r^{p\alpha}, \quad \varepsilon_r^{e\alpha} = \frac{S_r}{2\mu_\alpha}.$$

Откуда

$$S_r^\alpha = 2\mu_\alpha \left(\varepsilon_r - \varepsilon_r^{p\alpha} \right), \quad \forall \alpha = 1, 2, \ldots, L.$$

Учитывая (2.1), (2.3) из соотношения (2.2) выводим

$$\frac{d\varepsilon_r^{p\alpha}}{dt} + \frac{\left(2\mu_\alpha + c_\alpha\right)}{\eta_\alpha} \varepsilon_r^{p\alpha} = -\left(K_\alpha + \frac{4\mu_\alpha B_1}{r^3} \right) \frac{1}{\eta_\alpha}, \quad \forall \alpha = 1, 2, \ldots, L \tag{2.4}$$

где согласно [5] полагаем, что вязкость смеси горных пород при динамическом деформировании возрастает пропорционально времени процесса деформирования, то есть

$$\eta_\alpha = \eta_{0\alpha} t, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, L.$$

Решение уравнения (2.7) в этом случае имеет вид

$$\varepsilon_r^{p\alpha} = -\frac{1}{2\mu_\alpha + c_\alpha} \left[\left(K_\alpha + \frac{4\mu_\alpha B_1}{r^3} \right) + B_2 t^{-\alpha_0} \right], \quad \alpha_0 = \frac{2\mu_\alpha + c_\alpha}{\eta_{0\alpha}}, \quad \forall \alpha = 1, 2, \ldots, L. \tag{2.5}$$

Из начального условия $\varepsilon_r^{p\alpha} = 0$ при $t = t_*$ определяем неизвестную интегрирования B_2

$$B_2 = -\left(K_\alpha + \frac{4\mu_\alpha B_1}{r^3} \right) t_*^{\alpha_0}.$$

Из соотношений (2.3) следует

$$S_r = \left(\sum_{\alpha=1}^{L} \frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{-1} \left(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p \right),$$

где согласно (2.5) $\varepsilon_r^p = \sum_{\alpha=1}^{L} \varepsilon_r^{p\alpha}$.

Вычисляем

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = \frac{3}{2} S_r =$$

$$= \frac{3}{2} \mu_0 \left\{ -\frac{2}{r^3} + \sum_{\alpha=1}^{L} \left[\frac{1}{2\mu_\alpha + c_\alpha} \left(\frac{4\mu_\alpha}{r^3} \left(1 - t^{-\alpha_0} t_*^{\alpha_0} \right) \right) \right] \right\} B_1 + \frac{3}{2} \mu_0 \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{K_\alpha}{2\mu_\alpha + c_\alpha},$$

где введено обозначение $\mu_0 = \left(\sum_{\alpha=1}^{L} \frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{-1}$.

Из уравнения (2.1) находим

$$\sigma_r^p = \frac{\mu_0}{r^3}\left(1-I\right)B_1 + II\ln r + B_3\,,$$

$$\sigma_\theta^p = \frac{2\mu_0}{r^3}\left(1-I\right)B_1 + II\left(\ln r - 1\right) + B_3\,,$$

здесь обозначено $I = \sum_{\alpha=1}^{L}\left[\frac{2\mu_\alpha}{2\mu_\alpha + c_\alpha}\left(1 - t^{-\alpha_0}t_*^{\alpha_0}\right)\right]$, $II = \frac{3}{2}\mu_0\sum_{\alpha=1}^{L}\frac{K_\alpha}{2\mu_\alpha + c_\alpha}$.

Для определения неизвестных интегрирования C_1, C_2, B_1, B_3 и радиуса поверхности раздела областей упругого и пластического деформирования γ имеем

– граничное условие

$$\sigma_r^p = -P_0 e^{\hat{a}t}a \quad \text{при } r = a,$$

– условие на бесконечности

$$\sigma_r^e = \sigma_\theta^e = q = -gh \quad \text{при } r \to \infty,$$

– условие сопряжения

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p\,, \quad \sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p\,, \quad w^e = w^p \quad \text{при } r = \gamma.$$

В предположении, что в момент начала пластического течения $t = t_*$ зарождение пластической области начинается от внутренней границы сферической полости, начальные условия задаются в виде $\gamma = a$ при $t = t_*$.

Из условия равенства перемещений $w^e = w^p$ на упругопластической границе, то есть при $r = \gamma$ будем иметь $C_1 = B_1$.

Условие на бесконечности $\sigma_r^e = \sigma_\theta^e = q = -gh$ при $r \to \infty$ дает $C_2 = q = -gh$.

Из равенства компонент напряжений $\sigma_r^e = \sigma_r^p$ на упругопластической границе $r = \gamma$ получим уравнение

$$-\frac{4\mu C_1}{\gamma^3} + q = \frac{\mu_0}{\gamma^3}\left(1-I\right)C_1 + II\ln\gamma + B_3. \tag{2.6}$$

Постоянную интегрирования B_3 определяем из граничного условия на контуре полости $\sigma_r^p = -P_0 e^{\hat{a}t}$ при $r = a$

$$\frac{\mu_0}{a^3}\left(1-I\right)C_1 + II\ln a + B_3 = -P_0 e^{\hat{a}t}.$$

Откуда будем иметь

$$B_3 = -P_0 e^{\hat{a}t} - II\ln a - \frac{\mu_0}{a^3}\left(1-I\right)C_1. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.6), получим уравнение для определения постоянной интегрирования C_1

$$-\frac{4\mu C_1}{\gamma^3} + q = \frac{\mu_0}{\gamma^3}\left(1-I\right)C_1 + II\ln\gamma - P_0 e^{\hat{a}t} - \frac{\mu_0}{a^3}\left(1-I\right)C_1 - II\ln a.$$

Откуда получим

$$C_1 = \frac{-q - P_0 e^{\hat{a}t} + II\left(\ln\gamma - \ln a\right)}{\left[-\frac{4\mu}{\gamma^3} + \mu_0\left(1-I\right)\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{\gamma^3}\right)\right]}.$$

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ в массиве горных пород следует из условия непрерывности компонент напряжений $\sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p$ на этой границе, то есть при $r = \gamma$, а именно

$$-\frac{2\mu C_1}{\gamma^3} + C_2 = \frac{2\mu_0}{\gamma^3}\left(1-I\right)C_1 + II\left(\ln\gamma - 1\right) + B_3.$$

Подставляя полученные выражения для C_1, C_2, B_3, получим уравнение

$$\left(-\frac{2}{\gamma^3}\left(\mu+\mu_0(1-I)\right)+\frac{\mu_0}{a^3}(1-I)\right)\frac{\left(-q-P_0e^{\hat{a}t}+II\left(\ln\gamma-\ln a\right)\right)}{\left[-\frac{4\mu}{\gamma^3}+\mu_0\left(1-I\right)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{\gamma^3}\right)\right]}-$$
$$-II\left(\ln\gamma+\ln a-1\right)+P_0e^{\hat{a}t}+q=0. \tag{2.8}$$

Если в (2.8) положить $\gamma=a$ и $t=t_*$, что соответствует началу пластического течения, то получим соотношение для определения комбинации нагрузок $P_*=P_0e^{\hat{a}t_*}$ и $q=-gh$, при которых возникает пластическое деформирование при заданных физико-механических и геометрических параметрах в рамках обобщенной EVP модели тела S_p^α.

$$\left(1-\frac{\left(2\mu+\mu_0(1-I)\right)}{4\mu}\right)\left(P_0e^{\hat{a}t_*}+q\right)-II\left(2\ln a-1\right)=0. \tag{2.9}$$

Если порядок модели S_p^α равен 1, то есть $L=1$, то из (2.9) следуют результаты работы [4].

Литература

1. *Спорыхин А. Н.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. – М. : Физматлит, 2004. – 232 с.

2. *Спорыхин А. Н.* Неконсервативные задачи трехмерной теории неупругой устойчивости в геомеханике / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. – 372 с.

3. *Спорыхин А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : ВГУ, 1997. – 360 с.

4. *Спорыхин А. Н.* Динамическое деформирование полупространства со сферической полостью / А. Н. Спорыхин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 4 (42). – С. 21–24.

5. *Михайлюк А. В.* Горные породы при неравномерных динамических нагрузках / А. В. Михайлюк. – Киев : Наук. думка, 1980. – 154 с.

6. *Спорыхин А. Н.* Об одной модели упруговязкопластических смесей / А. Н. Спорыхин // Механика деформируемого твердого тела : сборник трудов 9 Всероссийской конференции в рамках Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. : электронный ресурс. Воронеж, 2016. – С. 199–201.

7. *Ивлев Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971 . – 231 с.

8. *Спорыхин А. Н.* Моделирование процессов деформирования и потери устойчивости упруговязкопластических смесей / А. Н. Спорыхин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – Москва, 2020. – С. 141–148.

УДК 539.3

ОДНООСНОЕ ЦИКЛИЧЕСКОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ РАЗНОМОДУЛЬНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

О. В. Дудко, А. А. Лаптева

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. В работе рассматривается процесс нестационарного деформирования разномодульного изотропно-упругого полупространства под действием граничного циклического одноосного растяжения-сжатия. Показано, что поле деформаций, в приграничной зоне принимающее форму «слой растяжения — слой сжатия — жесткий слой» на каждом такте цикла, на удалении от границы динамически перераспределяется. Пакет чередующихся сжатых и жестких слоев убегает вперед со скоростью быстрой характеристики, суммарная зона растяжения остается позади. Динамическое перераспределение деформаций происходит за счет многократных столкновений и отражений волн различных типов и скоростей.

Ключевые слова: разномодульная упругость, нестационарное деформирование, циклическое нагружение, одноосное растяжение и сжатие, сильный разрыв, столкновение волн.

Введение

Материалы с различным сопротивлением растяжению и сжатию распространены в природе и широко используются в современной промышленности и строительстве. Изучение динамического деформационного поведения подобных материалов является одним из активно развивающихся направлений механики сплошных сред. Физическая нелинейность модельных представлений разномодульных сред (например, [1–3]) существенна даже на уровне малых деформаций, что заставляет обращаться к специфическим схемам решения краевых задач, а также учитывать в этих решениях эффекты, которыми в линейной упругости обычно пренебрегают.

В настоящей работе рассматривается разномодульный материал с кусочно-постоянным модулем упругости, чувствительным к типу деформации. В рамках такой модели решается нестационарная начально-краевая задача о циклическом растяжении-сжатии на границе разномодульно-упругого полупространства. Циклический режим нагружения выбран из соображений его распространенности при эксплуатации разномодульных материалов. Для построения решения используется рекуррентный подход [4], учитывающий эффекты столкновений и отражений волн деформаций.

1. Модельные соотношения

Уравнения, описывающие одноосные движения точек разномодульной изотропно-упругой среды, при малости деформаций и отсутствии массовых сил имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma(e)=\omega(e)\cdot e, \quad (c(e))^2 u_{xx}=\ddot{u}, \quad e=u_x, \quad v=\dot{u}, \\ \omega(e)=\begin{cases}E_-, & e<0,\\ E_+, & e>0,\end{cases} \quad c(e)=\sqrt{\frac{\omega(e)}{\rho}}=\begin{cases}c_-, & e<0,\\ c_+, & e>0,\end{cases}\end{gathered} \tag{1}$$

где σ, e — продольные напряжение и деформация; u, v — продольное перемещение и скорость перемещения точек среды; $\omega(e)$, $c(e)$ — упругий модуль и характеристическая скорость уравнения движения (кусочно-постоянные функции деформаций, разрывные в точке свободного состояния); ρ — плотность среды (при малых деформациях $\rho=\text{const}$); все функции зависят от пространственной переменной x и времени t, $\Diamond_x = \partial\Diamond / \partial x$, $\dot{\Diamond} = \partial\Diamond / \partial t$. Дополнительно в (1) полагаем $E_\pm \neq 0$, $E_- > E_+$, $c_\pm \neq 0$, $c_- > c_+$, считая, что разномодульная среда связная и деформации сжатия распространяются быстрее деформаций растяжения.

Система (1) имеет обобщенное решение в форме непрерывной кусочно-гладкой функции $u(x,t)$, если при некоторых $x = x(t)$ происходят скачки производных u_x, $\dot{u}$ — сильные разрывы. Между фронтами сильных разрывов (волнами деформаций) выполняются дифференциальные законы сохранения (1), а перемещения и скачки первых производных перемещения на каждом фронте $x(t)$ связываются условиями Гюгонио [2]:

$$u^+ = u^-, \qquad \sigma(e^+) - \sigma(e^-) = \rho(\dot{x}(t))^2 (e^+ - e^-), \tag{2}$$

где (u^+, e^+) и (u^-, e^-) — состояния в малых окрестностях до и после $x(t)$ соответственно. Из (2) можно показать, что в разномодульной среде с переменной характеристической скоростью $c(e)$ возможны три типа сильных разрывов: ударная волна сжатия ($e^+ > 0$, $e^- < 0$ при $c_- > c_+$); полусигнотон ($e^+ = 0$, $e^- \neq 0$ или $e^+ \neq 0$, $e^- = 0$); простой разрыв ($e^+ > 0$, $e^- > 0$ или $e^+ < 0$, $e^- < 0$). Полусигнотоны и простые разрывы входят в семейство характеристик: быстрые фронты сжатия движутся со скоростью c_-, медленные фронты растяжения — со скоростью $c_+ < c_-$. Скорость ударной волны находится в интервале $(c_+; c_-)$. Отметим, что при $c_+ < c_-$ в разномодульной среде невозможна ударная волна растяжения, так как на подобном фронте сильного разрыва одновременно не выполняются условие эволюционности и требование неубывания энтропии [3]. В [5] показано, что в этом случае переход от предварительного сжатия к растяжению происходит с образованием жесткого слоя, ограниченного быстрой и медленной характеристиками. Условие эволюционности сильного разрыва [3] в форме

$$c(e^+) \leq |\dot{x}(t)| \leq c(e^-) \tag{3}$$

используем как дополнительное соотношение, обеспечивающее единственность обобщенного решения начально-краевой задачи для системы (1).

2. Возможные столкновения фронтов сильных разрывов

Пусть в обобщенном решении задачи при некотором t существуют два фронта сильных разрывов $x_L(t) = X_L + \dot{x}_L(t - \tau_L)$, $x_R(t) = X_R + \dot{x}_R(t - \tau_R)$, где $0 \leq x_L(t) < x_R(t)$, $X_L \geq 0$, $X_R > X_L$ и $\tau_L \leq t$, $\tau_R \leq t$ — известные начальные координаты и времена их возникновения. Если между $x_L(t)$ и $x_R(t)$ нет других волн, то при $\dot{x}_L > 0$ и $\dot{x}_R < 0$ происходит их встречное столкновение, при $0 < \dot{x}_R < \dot{x}_L$ или $\dot{x}_L < \dot{x}_R < 0$ — попутное. Согласно указанным соотношениям скоростей, встречно сталкиваться могут любые волны со встречными направлениями движения, а для попутных столкновений возможны только случаи «медленную волну растяжения догоняет быстрая волна сжатия (или ударная волна)», «ударную волну догоняет быстрый фронт сжатия». Результатом любого столкновения $x_L(t)$ и $x_R(t)$ являются как минимум два расходящихся фронта: прямая волна $x_r(t) = X + \dot{x}_r(t - \tau)$ и отраженная волна $x_l(t) = X + \dot{x}_l(t - \tau)$, где $0 \leq x_l(t) \leq x_r(t)$, $\dot{x}_r > 0$, $\dot{x}_l < 0$, $\tau = t\big|_{X = X_L(t) = X_R(t)}$ — время столкновения волн $x_L(t)$ и $x_R(t)$ (оно же — время появления $x_l(t)$ и $x_r(t)$) в точке X. Если фронт $x_l(t)$ или $x_r(t)$ не удовлетворяет условию (3), то он распадается на попутные полусигнотоны (быстрый и медленный) с жестким слоем между ними. В этом случае после столкновения возникают три волны.

3. Постановка и решение начально-краевой задачи

Положим, что разномодульное полупространство $x \geq 0$, не деформированное при $t < 0$, с момента времени $t = 0$ подвергается циклическому растяжению-сжатию на границе $x = 0$.

Начальные и граничные условия задачи ставим в перемещениях:

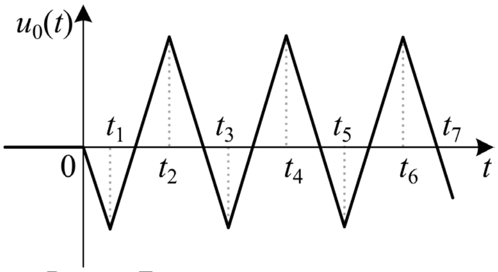


Рис. 1. Граничное перемещение

$$u(x,0)\big|_{x\geq 0} = \dot{u}(x,0)\big|_{x\geq 0} = 0, \quad u(0,t) = u_0(t), \tag{4}$$

где $u_0(t)$ — функция граничного перемещения в форме линейного сплайна (рис. 1) с заданными узлами (табл. 1). При $t = t_j$ направление движения граничных точек меняется на противоположное, образуя цикл растяжения-сжатия. Каждый такт начинается с растяжения.

Таблица 1

Узлы кусочно-линейной функции граничных перемещений

j	0	1	2	3	4	5	6	7
t_j *10^3, с	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$u_0(t_j)$*10^3, м	0.0	–3.0	4.0	–3.0	4.0	–3.0	4.0	0.0

При таком режиме движения границы полупространства задача имеет обобщенное решение в форме непрерывной кусочно-линейной функции $u(x,t)$ с изломами на фронтах сильных разрывов и линейными локальными сегментами $u_i(x,t)$ между ними. Фронты сильных разрывов, которые являются подвижными границами зон локальных решений $u_i(x,t),$ возникают при смене направления граничной нагрузки и при столкновении уже существующих волн. Для вычисления связной последовательности $u_i(x,t)$ $(i=1,2,3,\ldots)$ используем рекуррентный подход [4], каждая итерация которого учитывает актуальную часть условий (4) и локальные решения, полученные на предыдущих итерациях. Сутью такого подхода является замена непрерывного интервала времени $t=[0;+\infty)$ дискретным множеством точек $[\tau_0,\tau_1,\tau_2\ldots)$ и поэтапное вычисление $u_i(x,t)$ на локальных интервалах $t=[\tau_{i-1},\tau_i)$. Каждая точка разбиения τ_i $(\tau_0<\tau_1<\tau_2<\ldots)$ соответствует или t_j из краевых условий (4) (табл. 1), или времени очередного столкновения. Все этапы решения контролируются проверкой условия (3) для возникающих фронтов сильных разрывов. При необходимости неэволюционные волны заменяются на пакет из двух попутных полусигнотов с жестким слоем между ними.

На характеристической плоскости $\{x-t\}$ (рис. 2) представлено решение описанной задачи, полученное при соотношении скоростей характеристик $c_-/c_+\approx 1.1.$ Разнотипные волны и зоны деформаций на рис. 2 обозначены разными цветами линий и фона, недеформированная область перед передним фронтом не закрашена. Отрезки с положительным наклоном соответствуют прямым волнам, с отрицательным — отраженным. Буквами A, B на рис. 2 обозначены выбранные моменты времени, для которых на рис. 3 построены графики мгновенного распределения деформаций $e(\tilde{x},t).$ Оси абсцисс на графиках $e(\tilde{x},t)$ нормированы по координате переднего фронта, оси ординат имеют степенной масштаб, координаты волновых фронтов отмечены цветными пунктирными линиями, жесткие слои — цветным фоном.

В полученном решении (рис. 2, рис. 3) можно видеть, что в малой окрестности $x=0$ деформации, возникающие в результате заданного движения границы, изменяются по циклическому сценарию «растяжение — сжатие — жесткий слой». На удалении от границы эти деформации динамически перераспределяются за счет многократных столкновений попутных и встречных волн. Чередующиеся сжатые и жесткие слои убегают вперед, оставляя области растяжения позади. Серия вычислительных экспериментов показала, что при циклическом растяжения и сжатия разномодульного полупространства поле деформаций приходит с течением времени к подобному распределению при любом отношении $c_-/c_+>1.$

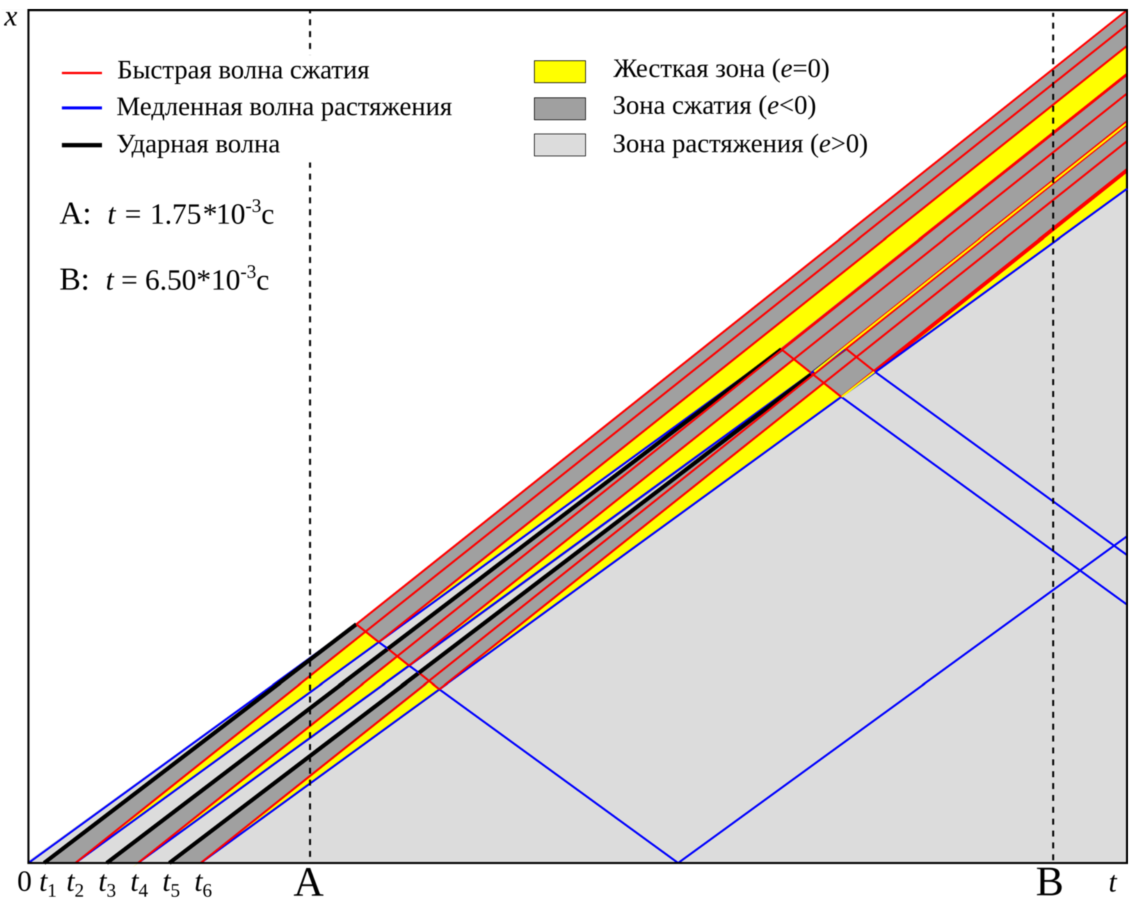


Рис. 2. Характеристическая плоскость обобщенного решения задачи

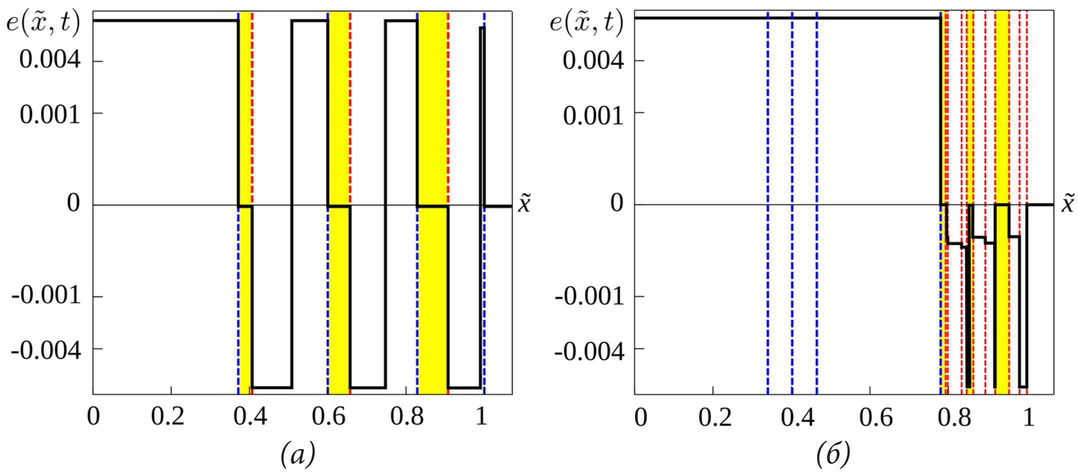


Рис. 3. Деформации при $t=1.75*10^{-3}$ *с (а),* $t=6.50*10^{-3}$ *с (б)*

Заключение

В работе получено решение начально-краевой задачи о циклическом одноосном растяжении-сжатии разномодульного упругого полупространства. Показано, что граничные возмущения растяжения и сжатия, возникающие при циклическом движении границы, вдали от нее перераспределяются и превращаются в область, состоящую из чередующихся подвижных сжатых и жестких слоев без зон растяжения. Подобную картину невозможно получить без учета взаимодействий волн. Таким образом, попутные и встречные столкновения разноскоростных фронтов сильных разрывов являются ключевым фактором в формировании волновой картины в разномодульной среде.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ИАПУ ДВО РАН (тема № FWFW-2021-0005).

Литература

1. *Амбарцумян С. Л.* Разномодульная теория упругости. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 320 с.

2. *Maslov V. P.* General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli / V. P. Maslov, P. P. Mosolov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1985. – Vol. 49, № 3. – P. 322–336.

3. *Куликовский А. Г.* Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – Москва : Московский лицей, 1998. – 412 с.

4. *Дудко О. В.* Нестационарные одномерные динамические задачи разномодульной упругости с кусочно-линейной аппроксимацией краевых условий / О. В. Дудко, А. А. Лаптева, В. Е. Рагозина // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 4. – С. 37–47.

5. *Дудко О. В.* О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / О. В. Дудко, А. А. Лаптева, К. Т. Семенов // Дальневосточный математический журнал. – 2005. – Т. 6, № 1–2. – С. 94–105.

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ВАРИАНТА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

В. Н. Зимин, Д. Р. Рахимов, И. Ю. Савельева

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аннотация. В работе представлена математическая модель для описания нелинейного деформирования композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения. Она основана на термодинамическом подходе с внутренними параметрами состояния, для которых определены количество, природа и кинетические соотношения с тензорными временами релаксации. Получены определяющее соотношение и уравнение теплопроводности, необходимые для формирования связанной краевой задачи термопластичности. В частном случае определяющие соотношения приведены к соотношениям эндохронной теории термопластичности. Проведенные расчеты показали хорошее согласование с экспериментальными данными, что подтверждает эффективность предложенного подхода.
Ключевые слова: пластичность, термопластичность, эндохронная теория, термодинамика, внутренние параметры состояния, кинетические соотношения, композиционные материалы, неизотермическое нагружение, нелинейное деформирование, определяющие соотношения.

Введение

Термопластичность композитных материалов является одной из ключевых областей исследования в современной механике материалов. Композиционные материалы обладают уникальными свойствами, такими как высокая прочность, жесткость и устойчивость к коррозии, что делает их незаменимыми во многих отраслях. Однако сложная структура этих материалов требует специальных теоретических подходов для точного описания их механического поведения при неизотермическом нагружении за пределами упругости.

Существуют различные теории для моделирования нелинейного деформирования композитных материалов [1–7]. В данной работе предложен вариант математической модели пластичности, основанный на термодинамическом подходе с внутренними параметрами состояния [8–10], которые введены для описания микроструктуры материала, скрытой от внешнего наблюдателя, такой как микротрещины, микроразрушения, дислокации и др. В частном случае определяющие соотношения приведены к соотношениям эндохронной теории термопластичности [11, 12].

1. Термодинамика неравновесных процессов с внутренними параметрами состояния

Для построения модели пластичности при неизотермическом нагружении используем термодинамический подход с внутренними параметрами состояния, опираясь на результаты работ [5, 7–10, 12]. Запишем закон сохранения энергии в дифференциальной форме, а второй закон термодинамики представим в виде неравенства Клазиуса — Дюгема [8]:

$$\rho T\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \delta_D, \quad \rho T\frac{\partial h}{\partial t} \ge -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{1}{T}q_i\frac{\partial T}{\partial x_i} + q_V, \tag{1}$$

где ρ — плотность; T — абсолютная температура; h — массовая плотность энтропии; $\frac{\partial}{\partial t} \equiv (\dot{}) \equiv \frac{d}{dt}$; t — время; q_i — компоненты вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$; x_i — пространственные координаты точки; q_V — объемная плотность мощности тепловых источников (стоков) теплоты; $\delta_D = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ji} - \rho\left(\frac{\partial A}{\partial t} + h\frac{\partial T}{\partial t}\right)$ — диссипативная функция, $i, j = 1,2,3$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$; ε_{ij} — компоненты тензора малой деформации $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$; A — массовая плотность свободной энергии Гельмгольца.

Предположим, что состояние рассматриваемой сплошной среды в окрестности любой точки пространства может быть описано с помощью четырёх термодинамических функций: массовых плотностей свободной энергии A и энтропии h, тензора напряжений $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, а также вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$ [5]. Аргументами данных функций будем считать следующие реактивные переменные: тензор малой деформации $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, абсолютную температуру T и тензорные внутренние параметры состояния с компонентами $\chi_{ij}^{(\alpha)} = \chi_{ij}^{(\alpha)}\left(\varepsilon_{kl}, T\right)$, где $\alpha = 1,\dots,N$, а N — количество внутренних параметров, $k, l = 1,2,3$. Тогда из системы (1), в соответствии с необходимыми и достаточными условиями реализуемости термомеханического процесса, получаем [8]

$$\sigma_{ji} = \rho\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad -\rho\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}}\dot{\chi}_{ij}^{(\alpha)} - \frac{1}{T}q_i\frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0. \tag{2}$$

Пусть компоненты тензора деформации ε_{ij} и внутренних параметров состояния $\chi_{ij}^{(\alpha)}$ малы ($\left\|\varepsilon_{ij}\right\| << 1$ и $\left\|\chi_{ij}^{(\alpha)}\right\| << 1$). Тогда разложим объемную плотность свободной энергии $\rho A\left(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}\right)$ в ряд Тейлора по этим переменным, ограничившись квадратичными членами:

$$\begin{aligned}\rho A\left(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}\right) = \rho A\left(0, T, 0\right) + \rho\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{0,T,0}\varepsilon_{ij} + \rho\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}}\right)_{0,T,0}\chi_{ij}^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\right)_{0,T,0}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \\ + \rho\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \chi_{kl}^{(\alpha)}}\right)_{0,T,0}\varepsilon_{ij}\chi_{kl}^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\rho\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}\partial \chi_{kl}^{(\beta)}}\right)_{0,T,0}\chi_{ij}^{(\alpha)}\chi_{kl}^{(\beta)}.\end{aligned} \tag{3}$$

Для конкретизации данного соотношения определим количество внутренних параметров состояния, их природу и эволюционные уравнения.

1.1. Внутренние параметры состояния: их природа и эволюционные уравнения

В настоящей работе будем рассматривать два тензорных внутренних параметра состояния: $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$. Параметр $\chi_{ij}^{(S)}$ отвечает за возникновение необратимых деформаций при силовом нагружении, $\chi_{ij}^{(T)}$ — при температурном нагружении. Для описания эволюции этих параметров постулируем существование следующих кинетических уравнений:

$$\tau_{ijkl}^{(S)}\frac{\partial \chi_{kl}^{(S)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(S)} = \overline{\chi}_{ij}^{(S)}, \quad \tau_{ijkl}^{(T)}\frac{\partial \chi_{kl}^{(T)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(T)} = \overline{\chi}_{ij}^{(T)}, \tag{4}$$

Здесь $\tau_{ijkl}^{(S)} = \tau_{ijkl}^{(S)}(T)$, $\tau_{ijkl}^{(T)} = \tau_{ijkl}^{(T)}(T)$ — компоненты положительно определенных тензоров времен релаксации параметров $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$ соответственно; $\overline{\chi}_{ij}^{(S)}$, $\overline{\chi}_{ij}^{(T)}$ — установившиеся значения этих параметров; z — внутреннее время, дифференциал которого определяют выражением $dz = d\xi / f(\xi)$ [6], где $f(\xi) = 1 + \beta\xi$ — функция упрочнения, β — материальный параметр; $d\xi$ — приращение меры внутреннего времени, определяемое как [7]

$$d\xi = \sqrt{P_{ijkl}d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{kl} + m^2 dT^2}, \tag{5}$$

где $P_{ijkl} = P_{ijkl}(T)$ — компоненты симметричного положительно определенного тензора материальных параметров [5]; $m = m(T)$ — материальный параметр модели [7].

В настоящей работе ограничимся рассмотрением следующих видов тензоров:

$$\tau_{ijkl}^{(S)} = \begin{cases}\tau_{ijkl}^{(S)}, & i = k \wedge j = l; \\ 0, & i \neq k \vee j \neq l,\end{cases} \quad \tau_{ijkl}^{(T)} = \begin{cases}\tau_{ijkl}^{(T)}, & i = k \wedge j = l; \\ 0, & i \neq k \vee j \neq l.\end{cases} \tag{6}$$

В результате получим несвязанные системы дифференциальных уравнений (4), решение которых для внутренних параметров $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$ имеют вид:

$$\chi_{ij}^{(S)} = \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(S)}\left(z-z'\right)\right) a_{klmn}^{(S)} \overline{\chi}_{mn}^{(S)} dz' = \overline{\chi}_{ij}^{(S)} - \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(S)}\left(z-z'\right)\right) \frac{\partial \overline{\chi}_{kl}^{(S)}}{\partial z'} dz', \tag{7}$$

$$\chi_{ij}^{(T)} = \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(T)}\left(z-z'\right)\right) a_{klmn}^{(T)} \overline{\chi}_{mn}^{(T)} dz' = \overline{\chi}_{ij}^{(T)} - \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(T)}\left(z-z'\right)\right) \frac{\partial \overline{\chi}_{kl}^{(T)}}{\partial z'} dz', \tag{8}$$

где $a_{ijkl}^{(S)} = 1/\tau_{ijkl}^{(S)}$, $a_{ijkl}^{(T)} = 1/\tau_{ijkl}^{(T)}$ — компоненты тензоров материальных параметров; $m, n = 1, 2, 3$.

Установившиеся значения внутренних параметров определим следующим образом:

$$\overline{\chi}_{ij}^{(S)} = X_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \overline{\chi}_{ij}^{(T)} = \tilde{Y}_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(T)}, \tag{9}$$

где $X_{ijkl}, \tilde{Y}_{ijkl}$ — компоненты симметричных тензоров 4-го ранга.

1.2. Определяющее соотношение и уравнение теплопроводности математической модели с внутренними параметрами состояния

Определив количество, природу и эволюционные уравнения для внутренних параметров, а также исключив их взаимное влияние, соотношение (3) примет вид:

$$\begin{aligned}\rho A\left(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}\right) = \rho B - D_{ij}^{*}\varepsilon_{ij} + F_{ij}^{*}\chi_{ij}^{(S)} - G_{ij}^{*}\chi_{ij}^{(T)} + \frac{1}{2}C_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - M_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}\chi_{kl}^{(S)} + \\ + N_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}\chi_{kl}^{(T)} + \frac{1}{2}H_{ijkl}^{*}\chi_{ij}^{(S)}\chi_{kl}^{(S)} + \frac{1}{2}L_{ijkl}^{*}\chi_{ij}^{(T)}\chi_{kl}^{(T)}.\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь для упрощения записи введены следующие обозначения:

$$B = A\left(0, T, 0\right), \qquad D_{ij}^{*} = -\rho\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{0,T,0}, \qquad C_{ijkl}^{*} = \rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\right)_{0,T,0},$$

$$F_{ij}^{*} = \rho\left(\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(S)}}\right)_{0,T,0}, \quad M_{ijkl}^{*} = -\rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \chi_{kl}^{(S)}}\right)_{0,T,0}, \quad H_{ijkl}^{*} = \rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(S)}\partial \chi_{kl}^{(S)}}\right)_{0,T,0},$$

$$G_{ij}^{*} = -\rho\left(\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(T)}}\right)_{0,T,0}, \quad N_{ijkl}^{*} = \rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \chi_{kl}^{(T)}}\right)_{0,T,0}, \quad L_{ijkl}^{*} = \rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(T)}\partial \chi_{kl}^{(T)}}\right)_{0,T,0}.$$

где $B = B(T)$ — массовая плотность свободной энергии при нулевых значениях деформации и внутренних параметров; $F_{ij}^{*} = F_{ij}^{*}(T)$, $G_{ij}^{*} = G_{ij}^{*}(T)$, $D_{ij}^{*} = D_{ij}^{*}(T)$ — компоненты симметричных тензоров 2-го ранга; $M_{ijkl}^{*} = M_{ijkl}^{*}(T)$, $N_{ijkl}^{*} = N_{ijkl}^{*}(T)$, $C_{ijkl}^{*} = C_{ijkl}^{*}(T)$, $H_{ijkl}^{*} = H_{ijkl}^{*}(T)$, $L_{ijkl}^{*} = L_{ijkl}^{*}(T)$ — компоненты симметричных тензоров 4-го ранга.

Для получения определяющего соотношения подставим выражение (10) в первое уравнение (2) и учтем соотношение (9). После упрощения получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} = \sigma_{ji}^{0}\left(T\right) - \sigma_{ji}^{(S)}\left(T\right) + \left(C_{ijkl}^{*} - \tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}M_{mnkl}^{*}\right)\varepsilon_{kl} - \\ -\left(M_{ijkl}^{*} - \tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}H_{mnkl}^{*}\right)\chi_{kl}^{(S)} + N_{ijkl}^{*}\chi_{kl}^{(T)}, \quad p, q = 1, 2, 3,\end{aligned} \tag{11}$$

где $\tilde{X}_{ijpq} = X_{ijkl}\dfrac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{pq}}$; $\sigma_{ji}^{0}(T) = D_{ij}^{*}(T) = C_{ijkl}^{*}\varepsilon_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензора начальных напряжений при стеснённом нагреве в случае отсутствия внутренних параметров; $\sigma_{ji}^{(S)}(T)$ — компоненты тензора начальных напряжений при стеснённом нагреве, вызванные влиянием установившегося значения внутреннего параметра состояния $\overline{\chi}_{ij}^{(S)}$ и равные:

$$\sigma_{ji}^{(S)}\left(T\right)=\frac{\partial\chi_{mn}^{(S)}}{\partial\varepsilon_{ij}}F_{mn}^{*}=\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}F_{mn}^{*}, \tag{12}$$

где $F_{mn}^{*}=K_{mnkl}^{*}\varepsilon_{kl}^{(T)}$, $K_{mnkl}^{*}=K_{mnkl}^{*}(T)$ — компоненты симметричного тензора 4-го ранга. Здесь $\varepsilon_{kl}^{(T)}=\alpha_{kl}^{(T)}\theta$ — компоненты тензора температурной деформации, $\alpha_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензора температурных коэффициентов линейного расширения, $\theta=T-T_0$ — изменение температуры, T_0 — температура естественного состояния.

Перепишем соотношение (11) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{ji}=&\left(C_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}M_{mnkl}^{*}\right)\varepsilon_{kl}-\left(C_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}K_{mnkl}^{*}\right)\varepsilon_{kl}^{(T)}-\\&-\left(M_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}H_{mnkl}^{*}\right)\chi_{kl}^{(S)}+N_{ijkl}^{*}\chi_{kl}^{(T)}.\end{aligned} \tag{13}$$

В частном случае, когда $K_{mnkl}^{*}=M_{mnkl}^{*}$, данное соотношение можно упростить:

$$\sigma_{ji}=C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^{(T)}\right)-M_{ijkl}\chi_{kl}^{(S)}+N_{ijkl}\chi_{kl}^{(T)}, \tag{14}$$

где

$$C_{ijkl}=C_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}M_{mnkl}^{*},\quad M_{ijkl}=M_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}H_{mnkl}^{*},\quad N_{ijkl}=N_{ijkl}^{*}. \tag{15}$$

Здесь $C_{ijkl}=C_{ijkl}(T)$ — компоненты тензора 4-го ранга эффективных упругих жесткостей; $M_{ijkl}=M_{ijkl}(T)$, $N_{ijkl}=N_{ijkl}(T)$ — компоненты тензоров 4-го ранга.

Для вычисления массовой плотности энтропии подставим выражение (10) во второе уравнение (2) и учтем соотношение (12). После упрощения получим:

$$\begin{aligned}h=&-\frac{dB}{dT}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}\frac{dC_{ijkl}^{*}}{dT}\varepsilon_{kl}-\frac{dC_{ijkl}^{*}}{dT}\varepsilon_{kl}^{(T)}-\frac{dM_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{kl}^{(S)}+\frac{dN_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{kl}^{(T)}\right)\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial G_{kl}^{*}}{\partial T}\chi_{kl}^{(T)}+\\&+\frac{1}{\rho}G_{kl}^{*}a_{klmn}^{(T)}\tilde{Y}_{mnpq}\frac{\partial\varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T}+\frac{1}{\rho}\left(C_{ijpq}^{*}\varepsilon_{ij}-K_{ijpq}^{*}\chi_{ij}^{(S)}-\left(N_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}+L_{ijkl}^{*}\chi_{ij}^{(T)}\right)a_{klmn}^{(T)}\tilde{Y}_{mnpq}\right)\frac{\partial\varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T}+\\&-\frac{1}{\rho}\frac{dK_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(S)}\varepsilon_{kl}^{(T)}-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\left(\frac{dH_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(S)}\chi_{kl}^{(S)}+\frac{dL_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(T)}\chi_{kl}^{(T)}\right),\end{aligned} \tag{16}$$

где $\frac{1}{\rho}G_{kl}^{*}a_{klmn}^{(T)}\tilde{Y}_{mnpq}\alpha_{pq}^{(T)}$ и $\frac{1}{\rho}\frac{dG_{kl}^{*}}{dT}\chi_{kl}^{(T)}$ отвечают за изменение энтропии при стесненном нагреве, вызванное влиянием установившегося значения внутреннего параметра состояния $\chi_{kl}^{(T)}$ и его эволюции соответственно. Тогда компоненты тензора G_{kl}^{*} можно определить как $G_{kl}^{*}=R_{klij}\varepsilon_{ij}^{(T)}$, где $R_{mnij}^{*}=R_{mnij}^{*}(T)$ — компоненты симметричного тензора 4-го ранга.

Перепишем соотношение (16) в следующем виде:

$$\begin{aligned}h=&-\frac{dB}{dT}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}\frac{dC_{ijkl}^{*}}{dT}\varepsilon_{kl}-\frac{dC_{ijkl}^{*}}{dT}\varepsilon_{kl}^{(T)}-\frac{dM_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{kl}^{(S)}+\frac{dN_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{kl}^{(T)}\right)\varepsilon_{ij}+\\&+\frac{1}{\rho}\left(C_{ijpq}^{*}\varepsilon_{ij}-K_{ijpq}^{*}\chi_{ij}^{(S)}+R_{ijpq}^{*}\chi_{ij}^{(T)}-\left(N_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}-R_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}^{(T)}+L_{ijkl}^{*}\chi_{ij}^{(T)}\right)a_{klmn}^{(T)}\tilde{Y}_{mnpq}\right)\frac{\partial\varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T}-\\&-\frac{1}{\rho}\left(\frac{dK_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(S)}-\frac{dR_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(T)}\right)\varepsilon_{kl}^{(T)}-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\left(\frac{dH_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(S)}\chi_{kl}^{(S)}+\frac{dL_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(T)}\chi_{kl}^{(T)}\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Тензоры $\hat{\mathbf{K}}^{*}$, $\hat{\mathbf{R}}^{*}$, $\hat{\mathbf{M}}^{*}$, $\hat{\mathbf{N}}^{*}$, $\hat{\mathbf{H}}^{*}$, $\hat{\mathbf{L}}^{*}$ необходимо определять с учетом ограничений, накладываемых диссипативным неравенством (2).

Для получения уравнения теплопроводности подставим выражение (17) в (1). После упрощения получим:

$$\rho c\dot{T} = TW_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \delta_D^* + \delta_D, \tag{18}$$

Здесь c — эффективная удельная массовая теплоемкость, определяемая как

$$c = c_\varepsilon - \frac{1}{\rho}T\left(\frac{1}{2}\frac{d^2C^*_{ijkl}}{dT^2}\varepsilon_{kl} - \frac{d^2C^*_{ijkl}}{dT^2}\varepsilon^{(T)}_{kl} - \frac{d^2M^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(S)}_{kl} + \frac{d^2N^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(T)}_{kl}\right)\varepsilon_{ij} +$$

$$+\frac{2}{\rho}T\left(\frac{dC^*_{ijpq}}{dT}\varepsilon_{ij} - \frac{dK^*_{ijpq}}{dT}\chi^{(S)}_{ij} + \frac{dR^*_{ijpq}}{dT}\chi^{(T)}_{ij}\right)\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T} -$$

$$-\frac{1}{\rho}T\left(\frac{dN^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon_{ij} - \frac{dR^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon^{(T)}_{ij} - R^*_{ijkl}\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{ij}}{\partial T} + \frac{dL^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(T)}_{ij}\right)a^{(T)}_{klmn}\tilde{Y}_{mnpq}\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T} -$$

$$-\frac{1}{\rho}T\left(\frac{d^2K^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(S)}_{ij} - \frac{d^2R^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(T)}_{ij}\right)\varepsilon^{(T)}_{kl} - \frac{1}{2}\frac{1}{\rho}T\left(\frac{d^2H^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(S)}_{ij}\chi^{(S)}_{kl} + \frac{d^2L^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(T)}_{ij}\chi^{(T)}_{kl}\right),$$

где $c_\varepsilon = -T\dfrac{d^2B}{dT^2}$ — удельная массовая теплоемкость при постоянном объеме; W_{ij} — компоненты симметричного тензора второго ранга, равные

$$W_{ij} = \left(\frac{dC^*_{ijkl}}{dT}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^{(T)}_{kl}\right) - \left(C^*_{ijpq} - N^*_{ijkl}a^{(T)}_{klmn}\tilde{Y}_{mnpq}\right)\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T} - \frac{dM^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(S)}_{kl} + \frac{dN^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(T)}_{kl}\right);$$

δ_D^* — дополнительное термодинамическое слагаемое, описывающее процессы рассеяния энергии, вызванные влиянием внутренних параметров состояния, и определяемое как

$$\delta_D^* = T\left(\frac{dM^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon_{kl} - \frac{dK^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon^{(T)}_{kl} - K^*_{ijpq}\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T} - \frac{dH^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(S)}_{kl}\right)\dot{\chi}^{(S)}_{ij} -$$

$$-T\left(\frac{dN^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon_{kl} - \frac{dR^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon^{(T)}_{kl} - \left(R^*_{ijpq} - L^*_{ijkl}a^{(T)}_{klmn}\tilde{Y}_{mnpq}\right)\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T} + \frac{dL^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(T)}_{kl}\right)\dot{\chi}^{(T)}_{ij}.$$

Уравнения (13) и (18), вместе с уравнением равновесия и соотношениями Коши, а также с начальными и граничными условиями, формируют связанную краевую задачу термопластичности с внутренними параметрами состояния.

2. Вариант эндохронной теории пластичности при неизотермическом нагружении

Для получения определяющих соотношений эндохронной теории пластичности в условиях неизотермического нагружения примем следующие допущения [8]:

$$M_{ijkl} = N_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad X_{mnkl} = \tilde{Y}_{mnkl} = I_{mnkl}. \tag{19}$$

В этом случае соотношение (14), учитывая установившиеся значения внутренних параметров состояния (9), примет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\int_0^z \exp\left(-a^{(S)}_{klmn}(z-z')\right)\frac{\partial\varepsilon_{mn}}{\partial z'}dz' - C_{ijkl}\int_0^z \exp\left(-a^{(T)}_{klmn}(z-z')\right)\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{mn}}{\partial z'}dz' = \sigma^{(S)}_{ij} - \sigma^{(T)}_{ij}, \tag{20}$$

где компоненты вспомогательных тензоров напряжений $\sigma^{(S)}_{ij}$ и $\sigma^{(T)}_{ij}$ равны:

$$\sigma^{(S)}_{ij} = C_{ijkl}\int_0^z \exp\left(-a^{(S)}_{klmn}(z-z')\right)\frac{\partial\varepsilon_{mn}}{\partial z'}dz', \quad \sigma^{(T)}_{ij} = C_{ijkl}\int_0^z \exp\left(-a^{(T)}_{klmn}(z-z')\right)\frac{d\varepsilon^{(T)}_{mn}}{\partial z'}dz'. \tag{21}$$

Продифференцировав соотношения (21) по внутреннему времени, получим:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(d\varepsilon_{kl} - \left(a^{(S)}_{klmn}S_{mnpq}\sigma^{(S)}_{pq} - a^{(T)}_{klmn}S_{mnpq}\sigma^{(T)}_{pq}\right)dz\right) + \left(\frac{dC_{ijkl}}{dT}S_{klmn}\sigma_{mn} - C_{ijkl}\alpha^{(T)}_{kl}\right)dT, \qquad (22)$$

где $S_{ijkl} = S_{ijkl}(T)$ — компоненты тензора 4-го ранга эффективных коэффициентов податливости, определяемые из соотношения $S_{ijkl}C_{klmn} = I_{ijmn}$.

Обратное соотношение:

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}d\sigma_{kl} + \left(a^{(S)}_{ijkl}S_{klmn}\sigma^{(S)}_{mn} - a^{(T)}_{ijkl}S_{klmn}\sigma^{(T)}_{mn}\right)dz - S_{ijkl}\frac{dC_{klmn}}{dT}S_{mnpq}\sigma_{pq}dT + \alpha^{(T)}_{ij}dT. \qquad (23)$$

Здесь приращение внутреннего времени dz определяем из уравнения $dz = d\xi / f(\xi)$, в котором функция упрочнения $f(\xi)$ задана как $f(\xi) = 1 + \beta\xi$, где β — материальный параметр модели. Приращение меры внутреннего времени $d\xi$ определяем из уравнения (5).

3. Пример расчета для демонстрации полученных соотношений

Для демонстрации полученных соотношений (23) рассмотрим деформирование многослойного композитного материала AS4/PEEK при различных углах армирования и температурах, предположив, что задача термически несвязанная.

Ввиду недостатка экспериментальных данных [3] ограничимся анализом случая, когда от температуры зависят только C_{ijkl}, S_{ijkl} и P_{ijkl}, а компоненты $a^{(S)}_{ijkl} = a^{(T)}_{ijkl}$ и $m = 0$, что соответствует отсутствию необратимых деформаций при температурном нагружении. Компоненты тензора P_{ijkl} заданы как $P_{ijkl} = P^0_{ijkl}\Omega(T)$, где P^0_{ijkl} — значения при $T_0 = 24$ °C; $\Omega(T)$ — функция, зависящая от температуры.

Материальные параметры модели $a^{(S)}_{ijkl}$ и P^0_{ijkl} определены методом минимизации функции отклонений расчетных кривых от экспериментальных данных при T_0, с учетом их положительной определенности. Значения функции $\Omega(T)$ также установлено этим методом. Материальный параметр β принят равным нулю, поскольку кривые деформирования не имеют выраженного участка линейного упрочнения.

Расчет выполнен в два этапа: 1-й этап — предварительный нагрев, 2-й этап — растяжение при постоянной температуре. Полученные результаты приведены на рис. 1.

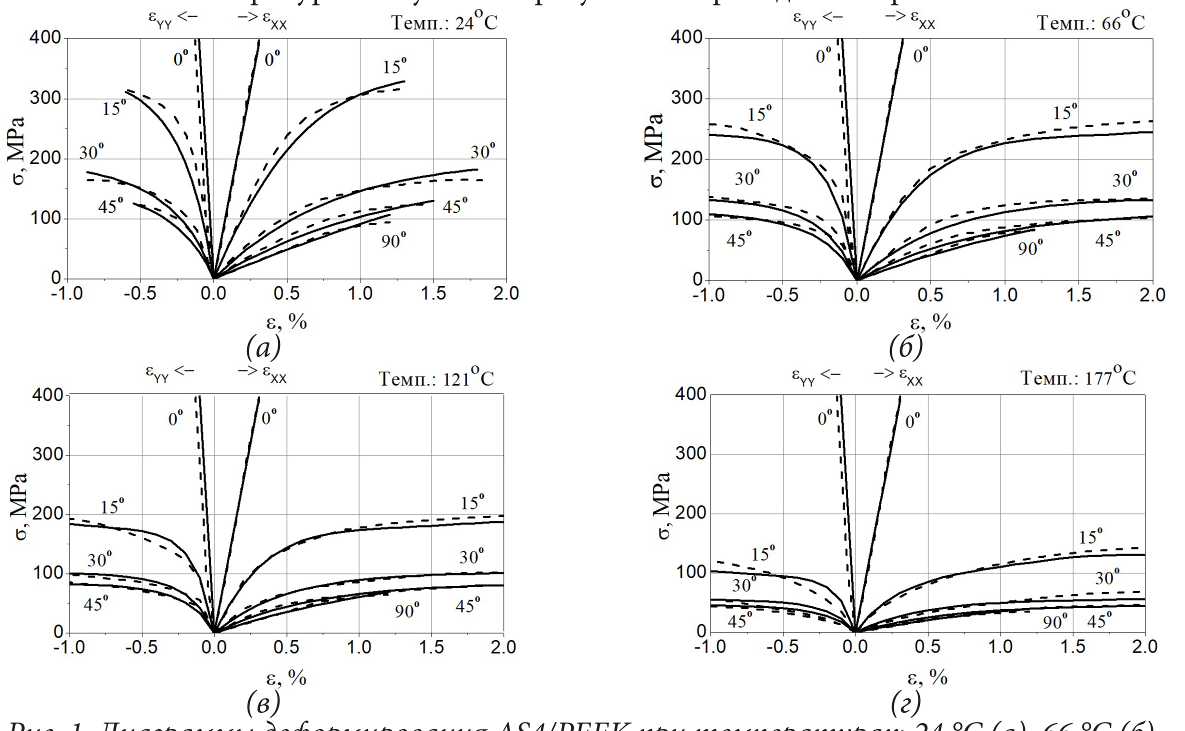


Рис. 1. Диаграммы деформирования AS4/PEEK при температурах: 24 °C (а), 66 °C (б), 121 °C (в), 177 °C (г). Сплошная линия — расчет, пунктирная линия — эксперимент [3]

Графики демонстрируют хорошее согласование расчетных значений по эндохронной теории термопластичности с экспериментальными данными.

Заключение

В работе предложен вариант математической модели пластичности для композиционных материалов при неизотермическом нагружении. Получены определяющие соотношения и уравнение теплопроводности для формирования связанной краевой задачи термопластичности. В частном случае модель приведена к соотношениям эндохронной теории термопластичности. Проведенные расчеты показали хорошее согласование с экспериментальными данными.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (код проекта FSFN-2024-004).

Литература

1. *Jones R. M.* Deformation theory of plasticity / R. M. Jones. – Blacksburg : Bull Ridge Publishing, 2009. – 622 p.

2. *Amijima S.* Linear and Nonlinear Stress-Strain Response of Laminated Composite Materials. Part II — Nonlinear Stress-Strain Response / S. Amijima, T. Adachi // The Science and Engineering Review of Doshisha University. – 1975. – Vol. 16, № 3-4. – P. 147–167.

3. *Sun C. T.* Characterization of elastic-plastic behavior of AS4/PEEK thermoplastic composite for temperature variation / C. T. Sun, K. J. Yoon // Journal of composite materials. – 1991. – Vol. 25. – P. 1297–1313.

4. *Головин Н. Н.* Математические модели деформирования углерод-углеродных композитов / Н. Н. Головин, Г. Н. Кувыркин // Механика твердого тела. – 2016. – Т. 51, № 5. – С. 596–605.

5. *Кувыркин Г. Н.* Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении / Г. Н. Кувыркин. – Москва : Изд-во МГТУ, 1993. – 142 с.

6. *Сарбаев Б. С.* Расчет диаграмм деформирования композиционных материалов с тканым наполнителем посредством эндохронной теории пластичности / Б. С. Сарбаев, А. Н. Барышев // Вест. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2017. – № 4. – С. 65–75.

7. *Сарбаев Б. С.* Определяющие соотношения для высокотемпературных композиционных материалов на основе эндохронной теории термопластичности / Б. С. Сарбаев // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2019. – № 7. – С. 97–104.

8. *Зарубин В. С.* Математические модели термомеханики / В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. – Москва : Физматлит, 2002. – 168 с.

9. *Maugin G.* Thermodynamics with Internal Variables. Part I. General Concepts / G. Maugin, W. Muschik // J. Non-Equilib. Thermodyn. – 1994. – Vol. 19, № 3. – P. 217–249.

10. *Maugin G.* The Thermomechanics of Plasticity and Fracture / G. Maugin. – Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – 350 p.

11. *Зимин В. Н.* Проектирование высокоэффективного металлокомпозитного баллона высокого давления сферической формы / В. Н. Зимин, Г. Н. Кувыркин, Д. Р. Рахимов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2022. – № 4(54). – С. 14–24.

12. *Кувыркин Г. Н.* Вычислительный алгоритм исследования определяющих соотношений эндохронной теории термопластичности для изотропных материалов / Г. Н. Кувыркин, Д. Р. Рахимов // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – № 3. – С. 116–122.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ В ТЕПЛОВОМ ПОТОКЕ

О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача о распределении температур в слое из материала со стохастическими теплофизическими свойствами. Анализируется вариант воздействия в виде гармонического теплового потока. Коэффициент теплопроводности принимается в виде случайной функции глубины. Решается задача об определении моментов случайного температурного поля в рамках корреляционной теории и задача оценки границ этого поля при учете моментов третьего порядка случайной функции теплопроводности для двухкомпонентного материала тела.

Ключевые слова: температура, уравнение теплопроводности, стохастическая неоднородность, статистические характеристики, функции Бесселя, макроскопические характеристики, двухкомпонентный композит.

Введение

В работе рассматривается задача о моделировании температурного поля в материале с теплофизическими свойствами, зависящими от координат. Рассмотрены два варианта построения модели со стохастическими свойствами на основе модификации решения задачи теплопроводности при использовании функций Бесселя [1].

В первом — для коэффициента теплопроводности задается явная форма случайной функции с заданным законом распределением случайного параметра. Во втором используется представление о макроскопических теплофизических характеристиках.

Математическая модель представлена краевой задачей для дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с переменными коэффициентами, содержащими случайный параметр.

1. Рассматривается тело в виде слоя толщиной h, которое находится под действием теплового потока

$$q(x,y) = q_0 \cdot \cos\alpha x \cdot \cos\beta y \tag{1}$$

одинакового на каждой из плоскостей, ограничивающих этот слой. Здесь q_0, α, β — постоянные детерминированные величины.

Система координат выбирается так, что плоскость xOy расположена в верхней границе слоя. Ось z направлена вниз.

Материал тела обладает неоднородностью теплофизических свойств вероятностной природы. В частности, рассмотрен вариант слоистой структуры с коэффициентом теплопроводности в виде случайной функции $\lambda(z)$, что определяет случайный характер температурного поля $T(x,y,z)$ в теле.

Уравнение стационарной теплопроводности [2] принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(z)\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \lambda(z)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{2}$$

Задача состоит в оценке статистических характеристик решения (2).

2. С учетом (1) решение (2) удобно искать в виде

$$T(x,y,z) = f(z) \cdot \cos\alpha x \cdot \cos\beta y$$

и перейти к рассмотрению уравнения

$$\frac{d}{dz}\left(\lambda(z)\cdot\frac{df(z)}{dz}\right)-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\lambda(z)\cdot f(z)=0 \tag{4}$$

относительно случайной функции $f(z)$. Решение (4) зависит от вида случайной функции $\lambda(z)$. Рассмотрим вариант степенной зависимости

$$\lambda(z)=\lambda_0\left(1+\varepsilon\cdot z\right)^n. \tag{5}$$

В (5) λ_0 и ε случайные величины с заданным совместным законом распределения, n — некоторая неслучайная величина.

Для выбранного вида неоднородности теплофизических свойств материала можно привести (4) к уравнению Бесселя [3]. Для этого нужно ввести новые обозначения

$$\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\quad \xi=1+\varepsilon\cdot z,\quad \delta=\gamma/\varepsilon,\quad f(\xi)=\xi^{\frac{1-n}{2}}v(\xi). \tag{6}$$

С учетом (5), (6) из (4) следует [3] уравнение Бесселя

$$\frac{d^2v}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dv}{d\xi}-v\cdot(\delta^2+\frac{(n-1)^2}{4\xi^2})=0. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) выражается через специальные функции, так что для $f(\xi)$ из (4) следует

$$f(\xi)=\xi^{-\frac{(n-1)}{2}}\left(B_1\cdot I_{\frac{n-1}{2}}(\delta\cdot\xi)+B_2\cdot K_{\frac{n-1}{2}}(\delta\cdot\xi)\right). \tag{8}$$

$$I_v(x)=\exp(-v\pi i/2)\cdot J_v(ix),\quad J_v(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^v\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x/2)^{2m}}{m!\,\Gamma(v+m+1)},$$

$$K_v(x)=\frac{1}{2}\pi i\cdot\exp(v\pi i/2)\cdot H_v^{(1)}(ix),\ H_v^{(1)}(x)=-J_v(x)+iY_v(x)$$

$$Y_v(x)=\frac{J_v(x)\cdot\cos\pi v-J_{-v}(x)}{\sin\pi v},\ J_{-u}(x)=(-1)^n J_{-u}(x),$$

Здесь коэффициенты $B_1,\ B_2$ определяются видом граничных условий, $I_v(x)$ — модифицированная функция Бесселя, $K_v(x)$ — функция Макдональда. $H_v^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля первого рода, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Для граничных условий

$$T\big|_{z=0}=T_0,\quad q\big|_{z=0}=q_h \tag{9}$$

коэффициенты $B_1,\ B_2$ принимают вид

$$B_1=\frac{q_0}{\lambda_0\gamma ch(\gamma h)}-T_0 th(\gamma h),\quad B_2=T_0. \tag{10}$$

В (10) $ch(x),\ th(x)$ — гиперболический косинус и тангенс.

Выражения (8), (10) описывают характер распределения температуры по толщине слоя при граничных условиях (9). Так как эти зависимости содержат случайные параметры $\lambda_0,\ \xi$, то (8) является случайной функцией переменной ξ.

$$f(\xi,\lambda_0)=\xi^{-\frac{(n-1)}{2}}\left(\left(\frac{q_h}{\lambda_0\gamma ch(\gamma h)}-T_0 th(\gamma h)\right)I_{\frac{n-1}{2}}(\delta\xi)+T_0K_{\frac{n-1}{2}}(\delta\xi)\right),\quad \mu=n-1 \tag{11}$$

Задача состоит в построении ее статистических характеристик

3. Рассмотрим вариант модели, когда случайным является только параметр $u=1/\lambda_0$, который подчиняется экспоненциальному закону распределения [5].

$$p(x)=\begin{cases}0,\ при\ \ x<0\\ k\exp(-kx),\ \ x\geq 0\end{cases}.$$

Тогда математическое ожидание случайной функции принимает вид

$$\left\langle f\left(\xi\right)\right\rangle = \int_0^\infty \xi^{-\frac{(n-1)}{2}} \left(\left(\frac{uq_h}{\gamma ch\left(\gamma h\right)} - T_0 th\left(\gamma h\right) \right) I_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) + T_0 K_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) \right) k \exp(-ku) du$$

или после интегрирования

$$\left\langle f\left(\xi\right)\right\rangle = \xi^{-\frac{(n-1)}{2}} \left(\left(\frac{q_h}{k\gamma ch\left(\gamma h\right)} + T_0 th\left(\gamma h\right) \right) I_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) + T_0 K_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) \right). \tag{12}$$

Здесь угловые скобки обозначают операцию математического ожидания.

Для флуктуации функции $f(\xi)$ из (11), (12) следует

$$f\left(\xi\right) - \left\langle f\left(\xi\right)\right\rangle = \xi^{-\frac{(n-1)}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) \frac{u\left(u - \left\langle u\right\rangle\right) q_h}{\gamma ch\left(\gamma h\right)} \tag{13}$$

С учетом (13) получается явное выражение зависимости дисперсии рассматриваемой случайной функции от параметра глубины слоя ξ

$$D(\xi) = \xi^{1-n} \left(I_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) \right)^2 \left(\frac{q_h}{\gamma ch\left(\gamma h\right)} \right)^2 \left(1/k\right)^2. \tag{14}$$

Соотношения (12), (14), описывают распределение статистических характеристик стохастической компоненты температурного поля по глубине слоя. Полученные зависимости содержат параметр закона распределения случайного коэффициента теплопроводности λ_0, параметры γ и q_h, характеризующие частоту и амплитуду внешнего воздействия, толщину слоя и температуру T_0 на границе.

Если $n = 1$, то коэффициент теплопроводности изменяется по линейному закону и функция $f(\xi)$ принимает вид

$$f\left(\xi\right) = B_1 \cdot I_0\left(\delta\xi\right) + B_2 \cdot K_0\left(\delta\xi\right),$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются с помощью (10).

4. Рассмотрим вариант модели, в котором коэффициент теплопроводности является статистически однородной случайной функцией координат, описывающей теплофизические характеристики материала из двухкомпонентного композита

Предположим, что функция $\lambda(z)$ обладает эргодическим свойством и воспользуемся представлением о макроскопических теплофизических характеристиках микронеоднородных сред.

Если материал является микроскопически неоднородным и состоит из двух компонентов, то для оценки верхней и нижней границ макроскопического коэффициента теплопроводности λ^* можно воспользоваться соотношениями [4]

$$\begin{gathered}
\lambda_0(c,m,\alpha) = cm + (1-c) - \frac{1}{3}(m-1)^4(1-c)^2 c^2 a^{-1} \\
a = 2(c + m(1-c))(m-1)^2(1-c)c + (m-1)^3(1-2c)(1-c)c - \alpha \\
\lambda_{00}(c,m,\alpha) = m\left(c + m(1-c) - \frac{4}{3}(m-1)^4(1-c)^2 c^2 b^{-1} \right)^{-1} \\
b = 2(c + m(1-c))(m-1)^2(1-c)c - 2(m-1)^3(1-2c)(1-c)c + \alpha \\
\lambda_0 = \lambda_+ / \lambda_2,\ \lambda_{00} = \lambda_- / \lambda_2,\ m = \lambda_1 / \lambda_2.
\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь λ_+ и λ_- — верхняя и нижняя границы λ^*, λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности компонентов с номерами 1 и 2, c — концентрация компоненты смеси с номером 1. Параметр α, связанный со свойствами внутренней геометрии, удовлетворяет условиям

$$\alpha \in \left[\alpha_1, \alpha_2\right],\ \alpha_1 = \frac{2}{3}(m-1)^3(1-c)^2 c,\ \alpha_2 = -\frac{2}{3}(m-1)^3(1-c)^2 c.$$

Соотношения (15) сформулированы с учетом моментов третьего порядка случайной функции $\lambda(z)$ и позволяют построить верхнюю и нижнюю оценки температурного поля в слое. Для построения оценки верхней границы функции $f(\xi)$ следует положить в (11) $\mu = 0$ и $\lambda_0 = \lambda_+$, а для оценки снизу — $\mu = 0$ и $\lambda_0 = \lambda_-$. В таком случае при граничных условиях (9) $f = f(\xi, \lambda_1, \lambda_2, c, \alpha, T_0, q_h)$ и с помощью (3) получается явная зависимость границ температурного поля от теплофизических характеристик компонентов бикомпозита и их концентраций.

Заключение

На основании первой стохастической модели теплопроводности для выбранного закона распределения случайного параметра, описывающего свойства материала, получена зависимость температурного поля от параметров этого закона.

Использование второй модели позволило получить зависимость температурного поля от теплофизических характеристик компонентов композита и их концентраций.

Литература

1. *Коренев Б. Г.* Задачи теории теплопроводности и термоупругости / Б. Г. Коренев. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 400 с.

2. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 599 с.

3. *Гаврилов В. С.* Функции Бесселя в задачах математической физики: учебно–методическое пособие / В. С. Гаврилов, Н. А. Денисова, А. В. Калинин. – Нижний Новгород : Издательство Нижегородского госуниверситета, 2014. – 40 с.

4. *Иванищева О. И.* Моделирование упругих свойств пористого материала с учетом структурной характеристики / О. И. Иванищева, Ю. Н Прибытков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной конференции. – Воронеж, 2009. – 302 с.

5. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 479 с.

УДК 537

ОБ ОЦЕНКЕ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ БИКОМПОЗИТА

О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается микронеоднородная перфорированная полуплоскость со стохастической границей. Предлагается математическая модель оценки совместного влияния на дисперсию возмущенного слоя поля деформаций различных параметров этой модели. Рассмотрение проводится для случая двухкомпонентного упругого материала. Граница тела — статистически однородная случайная функция. Пластина имеет перфорацию круговыми отверстиями. Сформулирована зависимость дисперсии компоненты тензора деформации от характеристик неоднородности материала, статистических характеристик функции, описывающей границу и параметров перфорации.
Ключевые слова: поле деформаций, круговые отверстия, стохастическая граница, возмущения, двухкомпонентный материал.

Введение

Вариант задачи о возмущенном напряженном состоянии однородного упругого тела, граница которого описывается случайной функцией, представлен в [1]. Модель деформированного состояния тела, выполненного из зернистого бикомпозита и имеющего стохастическую, границу рассматривалась в [2]. Совместное влияние стохастической границы тела и пористости материала на характеристики возмущенного слоя поля деформаций исследовалось в [3, 4]. В данной работе предлагается способ построения оценки дисперсии компоненты тензора деформаций при учете характеристик границы, микронеоднородных свойств материала и нарушении сплошности наличием перфорации.

Очевидно, что вблизи стохастической границы тела наблюдается возмущение полей, которые затухают при удалении от нее. Оценкой глубины возмущенного слоя поля можно принять расстояние от границы, на котором дисперсия этого поля уменьшается на 90 % [1].

1. Рассмотрим материал пластины, деформированное состояние которой подлежит оценке, и рассчитаем приведенные упругие характеристики при наличии в ней бесконечного количества отверстий. Приведенные упругие характеристики определяются из условия равенства средних деформаций сплошной пластины и пластины с большим количеством отверстий. Для однородного упругого материала и круговой формы отверстий приведенные характеристики имеют вид

$$E^*(E,c) = E\frac{(1-c)^2}{1+c}, \qquad \nu^*(\nu,c) = 1-\frac{1-\nu(1-2c)}{(1-c)^2}. \tag{1}$$

Здесь E, ν — постоянные материала, c — концентрация круговых отверстий.

Рассмотрим вариант структуры материала пластины без отверстий, представленный упругим бикомпозитом зернистой структуры. Если укладка зерен не является регулярной, то упругие свойства материала удобно описывать случайными полями $E(x,y)$, $\nu(x,y)$.

Пусть структура материала соответствует статистически однородному и изотропному полю. Если напряженное состояние является однородным, то макроскопические параметры Ламэ λ, μ материала можно представить в виде функций, зависящих от моментов первого и второго порядков полей упругих характеристик

$$\mu = \langle\mu\rangle - \frac{2\cdot\langle 3\lambda+8\mu\rangle D_{22}}{15\langle\mu\rangle\langle\lambda+2\mu\rangle}$$

$$\lambda = \langle\lambda\rangle - \frac{1}{3\cdot\langle\lambda+2\mu\rangle}\left(3D_{11}+4D_{12}-\frac{4\cdot(\langle\lambda\rangle+\langle\mu\rangle)}{5\langle\lambda\rangle}\cdot D_{22}\right) \tag{2}$$

Здесь $\langle\lambda\rangle$, $\langle\mu\rangle$ — математические ожидания случайных полей, $D_{11}=\left\langle(\lambda^0)^2\right\rangle$, $D_{12}=\left\langle\lambda^0\mu^0\right\rangle$, $D_{22}=\left\langle(\mu^0)^2\right\rangle$ — одноточечные центральные моменты второго порядка.

Если воспользоваться эргодическим свойством рассматриваемых полей, то для двухкомпонентного композита можно получить следующие оценки этих моментов

$$\begin{aligned}
&\langle\lambda\rangle = \lambda_1\cdot(1-c_2)+\lambda_2\cdot c_2\\
&\langle\mu\rangle = \mu_1\cdot(1-c_2)+\mu_2\cdot c_2\\
&D_{11} = (\lambda_1-\langle\lambda\rangle)^2\cdot(1-c_2)+(\lambda_2-\langle\lambda\rangle)^2\cdot c_2\\
&D_{12} = (\lambda_1-\langle\lambda\rangle)\cdot(\mu_1-\langle\mu\rangle)\cdot(1-c_2)+(\lambda_2-\langle\lambda\rangle)\cdot(\mu_2-\langle\mu\rangle)\cdot c_2\\
&D_{22} = (\mu_1-\langle\mu\rangle)^2\cdot(1-c_2)+(\mu_2-\langle\mu\rangle)^2 c_2
\end{aligned} \tag{3}$$

В (3) c_2 — концентрация компоненты композита с характеристиками μ_2, λ_2.

С учетом (3) макроскопические характеристики (2) становятся функциями переменных μ_1, λ_1, μ_2, λ_2, c, c_2.

Учитывая (2), (3) и связь между модулями упругости и параметрами Ламэ

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},\quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \tag{4}$$

получаем явную зависимость приведенных модулей (1) от упругих свойств компонентов материала пластины, их концентрации и концентрации отверстий.

Для исследования зависимости технических характеристик рассматриваемой модели от ее параметров, воспользуемся следующей заменой

$$l_1=\frac{\mu_1}{\mu_2},\quad l_2=\frac{\lambda_1}{\mu_2},\quad l_3=\frac{\lambda_2}{\mu_2},\quad \bar\lambda=\frac{\lambda}{\mu_2},\quad \bar\mu=\frac{\mu}{\mu_2}\ .$$

Тогда из (2), (3) следует

$$\begin{aligned}
\bar\lambda(l_1,l_2,l_3,c_2) = {} & l_2\cdot(1-c_2)+l_3\cdot c_2-\frac{(1-c_2)c_2(l_2-l_3)\big(3(l_2-l_3)+4(l_1-1)\big)}{3\cdot((1-c_2)(l_2+2l_1)+c_2(l_3+2))}-\\
& -\frac{4}{15}\frac{\big((1-c_2)(l_2+l_1)+c_2(l_3+1)\big)(l_1-1)^2(1-c_2)c_2}{\big(l_2(1-c_2)+l_3\cdot c_2\big)\big((1-c_2)(3l_2+2l_1)+c_2(3l_3+2)\big)}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\bar\mu(l_1,l_2,l_3,c_2) = l_1\cdot(1-c_2)+c_2-\frac{2(1-c_2)c_2(l_1-1)^2\big((1-c_2)(3l_2+8l_1)+c_2(3l_3+8)\big)}{15\big(l_1\cdot(1-c_2)+c_2\big)\big((1-c_2)(l_2+2l_1)+c_2(l_3+2)\big)}. \tag{6}$$

С учетом (4)–(6) из (1) следует явная зависимость приведенных упругих характеристик от параметров неоднородности материала, представленная дробно-рациональными функциями

$$E^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c) = \frac{\bar\mu(l_1,l_2,l_3,c_2)\big(3\bar\lambda(l_1,l_2,l_3,c_2)+2\bar\mu(l_1,l_2,l_3,c_2)\big)}{\bar\lambda(l_1,l_2,l_3,c_2)+\bar\mu(l_1,l_2,l_3,c_2)}\frac{(1-c)^2}{1+c} \tag{7}$$

$$\nu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c) = 1-\frac{2\big(\bar\lambda(l_1,l_2,l_3,c_2)+\bar\mu(l_1,l_2,l_3,c_2)\big)-\bar\lambda(l_1,l_2,l_3,c_2)(1-2c)}{(1-c)^2\,2\big(\bar\lambda(l_1,l_2,l_3,c_2)+\bar\mu(l_1,l_2,l_3,c_2)\big)}. \tag{8}$$

Приведенные параметры Ламэ примут вид

$$\lambda^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c) = \frac{E^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)\cdot\nu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)}{\left(1+\nu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)\right)\cdot\left(1-2\nu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)\right)} \tag{9}$$

$$\mu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c) = \frac{E^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)}{2\left(1+\nu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)\right)}.$$

Как видно, управлять упругими характеристиками E^* и ν^* можно с помощью пяти параметров. При этом следует учитывать следующие ограничения

$$l_1 \in (1-\gamma, 1+\gamma), \qquad \frac{l_2}{l_3} \in (1-\delta, 1+\delta), \qquad \delta,\gamma \in (0,1),$$

при которых справедливы (2) и естественные требования $c \in (0,1)$, $c_2 \in (0,1)$. Пример характера зависимости приведенных упругих модулей рассмотренного материала от концентрации отверстий представлен на рис. 1.

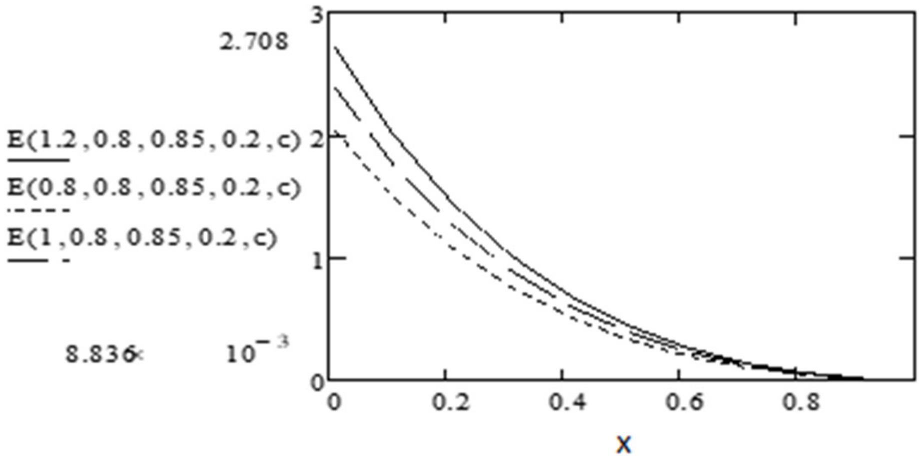


Рис. 1. Зависимость приведенного модуля Юнга модели от концентрации круговых отверстий при следующих значениях параметров $l_1 \in \{0.8, 1.0, 1.2\}$, $l_2 = 0.8$, $l_3 = 0.85$, $c_2 = 0.2$

Как и следовало ожидать, увеличение количества отверстий приводит к убыванию приведенной упругой характеристики. Причем скорость этого изменения растет вместе с ростом l_1 при малых концентрациях второй компоненты матрицы материала

2. Рассмотрим упругую полуплоскость из такого двухкомпонентного композита с хаотически расположенными в нем круговыми отверстиями. Полуплоскость растягивается усилиями σ вдоль оси y, относительно которой флуктуирует граница и при $x \to \infty$ выполняются условия

$$\sigma_y = \sigma = \text{const}, \qquad \sigma_x = 0, \qquad \tau_{xy} = 0.$$

Граница полуплоскости описывается статистически однородной случайной функцией $x = H(y)$ и свободна от нагрузок.

Случайный характер профиля границы приводит к тому, что поля тензора напряжений и деформаций становятся случайными у границы. При удалении от границы возмущения этих полей угасают. Для оценки глубины возмущенного слоя представляет интерес изменение дисперсии напряжений и деформаций, убывающих вдоль оси x. В данном случае задача состоит в оценке дисперсии компоненты тензора деформаций ε_{xx}, ε_{yy}.

Примем, что математическое ожидание этой случайной функции равно нулю, то есть

$$M\{H(y)\} = 0$$

и воспользуемся выражениями для дисперсии деформаций, полученными в [3] в предположении статистической однородности и изотропии напряженно-деформированного состояния

$$D_{\varepsilon_x} = 2\sigma^2 \mu_2^2 \int_0^{+\infty} \omega^2 \exp(-2|\omega| x) \left(\frac{|\omega| x}{2\mu^*} - \frac{\lambda^*}{\mu^* \left(3\lambda^* + 2\mu^*\right)} \right)^2 S(\omega) d\omega \tag{10}$$

$$D_{\varepsilon_y} = 4\sigma^2 \mu_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \exp(-2|\omega| x) \left(\frac{|\omega| x}{2\mu *} - 2\frac{\lambda^* + \mu *}{\mu * \left(3\lambda^* + 2\mu *\right)} \right)^2 S(\omega) d\omega. \tag{11}$$

Здесь $\lambda^*(l_1, l_2, l_3, c_2, c)$, $\mu^*(l_1, l_2, l_3, c_2, c)$ являются приведенными упругими характеристиками (5)–(9), $S(\omega)$ — спектральная плотность случайной функции $H(y)$.

Для расчета дисперсии компонент тензора деформаций (10), (11) остается задать вид спектральной плотности $S(\omega)$.

3. Если спектральная плотность имеет дробно-рациональный вид, то интегрирование в (10), (11) можно провести с помощью вычетов.

Примером такой спектральной плотности может быть

$$S(\omega) = \frac{D_H \alpha}{\pi\left(\alpha^2 + \omega^2\right)}, \tag{12}$$

где D_H — дисперсия случайной функции $H(y)$, $\alpha > 0$ — параметр закона распределения.

Если профилограмма границы описывается корреляционной функцией, которая содержит периодическую компоненту

$$K_H(\tau) = D_H \exp(-\alpha|\tau|) \cos\left(\beta\tau\right),$$

то для нее спектральная плотность тоже имеет дробно-рациональный вид

$$S(\omega) = \frac{D_H \alpha \left(\omega^2 + b^2\right)}{\pi\left(\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4\right)}, \quad a = \alpha^2 - \beta^2, b = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{13}$$

Для границы со спектральной плотностью (12) дисперсии компонентов поля деформаций могут быть представлены в следующем виде

$$\begin{gathered} \bar{D}\varepsilon_x = D_H \cdot \alpha \cdot \sigma^2 \cdot \exp(-2x\alpha) \cdot \left(\frac{\alpha x}{2\mu^*} - \frac{\lambda^*}{\mu^*\left(3\lambda^* + 2\mu^*\right)} \right)^2 \\ \bar{D}\varepsilon_y = D_H \cdot \alpha \cdot \sigma^2 \cdot \exp(-2x\alpha) \cdot \left(\frac{\alpha x}{2\mu^*} - 2\frac{\lambda^* + \mu^*}{\mu^*\left(3\lambda^* + 2\mu^*\right)} \right)^2 \\ \bar{D}\varepsilon_x = D_{\varepsilon_x} \big/ \mu_2^2, \qquad \bar{D}\varepsilon_y = D_{\varepsilon_y} \big/ \mu_2^2, \end{gathered} \tag{14}$$

С учетом (5), (6), (9) выражения (14) описывают характер изменения рассматриваемой статистической характеристики возмущенного слоя поля деформаций от глубины этого слоя для различных значений параметров l_1, l_2, l_3, c_2, c, α, σ, D_H.

Как и следовало ожидать, рассмотренные зависимости, представленные на рис. 2, являются убывающими функциями переменной x. При этом увеличение параметра геометрии границы приводит к снижению дисперсии и этот эффект возрастает с глубиной приграничного слоя.

Заключение

Сформулирована зависимость дисперсии компонент тензора деформаций перфорированной пластины с матрицей из зернистого упругого бикомпозита от глубины приграничного слоя. При этом учитываются геометрические и упругие характеристики структуры тела, а также параметры распределения стохастической границы и приложенной нагрузки. Явный вид указанных зависимостей формируется с учетом (9) при использовании (14).

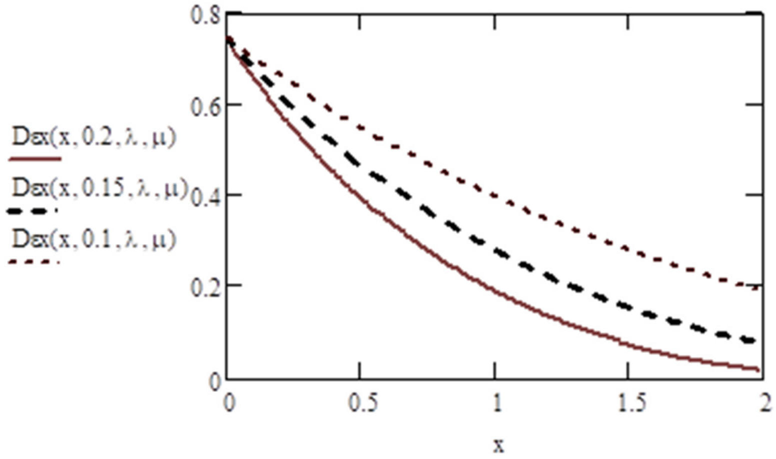


Рис. 2. Распределение дисперсии компоненты ε_x по глубине возмущенного слоя при различных значениях параметра геометрии границы α

Литература

1. *Хусу А. П.* Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход / А. П. Хусу, Ю. Р. Витенберг, В.А. Пальмов. – М. : Наука, 1975. – 343 с.

2. *Иванищева О. И.* Математическое моделирование деформации композита со стохастической границей / О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий: материалы Международной научно-практической конференции, 2–11 июня 2018 года, Сочи. – 2018. – С. 21–24.

3. *Иванищева О. И.* Деформированное состояние пористого полупространства с нерегулярной границей / О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : А43 сб. тр. Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2018 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2018. – 1673 с.

4. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х томах, т. 1. Механика материалов/ А. Н. Гузь, Л. П. Хорошун, Г. А. Ванин и др. – Киев : Наук. Думка, 1982. – 368 с.

УДК 539.37+539.214

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ НЕОБРАТИМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ МАТЕРИАЛА В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ ВОЗРАСТАЮЩЕМ И УБЫВАЮЩЕМ МЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко, Е. О. Попова

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. В работе представлено численное решение неизотермической задачи о необратимом деформировании слоя материала, расположенного в круглой недеформируемой трубе. Слой материала имеет конечную длину и находится в условиях жесткого сцепления со стенками трубы. Материал, обладающий упругими, вязкими и пластическими свойствами, деформируется в результате приложения к нему переменного перепада давления, сначала возрастающего со временем, затем постоянного и наконец убывающего до нуля. Необратимые деформации, накапливающиеся в материале, могут быть деформациями ползучести или пластическими деформациями. В рамках модели больших деформаций рассмотрены следующие процессы: ползучесть материала при возрастании нагрузки, пластическое течение при возрастающей и постоянной нагрузке, торможение течения при убывающем нагружении и разгрузка.
Ключевые слова: упругость, вязкоупругость, ползучесть, вязкопластическое течение, пластическое течение, большие деформации, деформационное теплопроизводство, теплопроводность, связанное термодеформирование, модель больших деформаций.

Введение

В процессе обработки материалов с приложением значительных механических нагрузок возникают необратимые деформации. Эти деформации могут быть деформациями ползучести или пластическими деформациями и могут достигать значительных размеров тем самым вызывая увеличение температуры в обрабатываемых материалах. Поэтому подобные задачи являются нелинейными и должны рассматриваться в рамках моделей, учитывающих конечные деформации и перемещения. В данной работе будем использовать модель больших упругопластических деформаций [1], в которой обратимые и необратимые деформации определяются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса). Имеется обобщение данной модели на неизотермический случай и на случай учета вязкости при пластическом течении в [2]. Проблема согласования законов ползучести и пластического течения рассмотрена в [3].

1. Постановка задачи

Рассмотрим слой материала, имеющий длину l и находящийся в круглой жесткой трубе радиуса R. Слой материала жестко сцеплен со стенками трубы. Несжимаемый материал обладает упругими, реологическими и пластическими свойствами. Для упрощения модельных соотношений задачи будем использовать цилиндрическую систему координат r, φ, z. Материал деформируется при механическом воздействии на него в форме перепада давления, заданного следующим образом:

$$\sigma_{zz}\left(0, u\left(0,t\right), t\right) = -p\left(t\right) = -\alpha t, \qquad \sigma_{zz}\left(0, l + u\left(0,t\right), t\right) = 0. \tag{1}$$

В граничных условиях (1) σ_{zz} — компонента тензора напряжений, $u = u_z(r,t)$ — отличная от нуля компонента вектора перемещений, α — задаваемая постоянная, t — время.

Условие жесткого сцепления материала со стенками трубы означает отсутствие перемещений при $r = R$.

В начале процесса нагружения, пока перепад давления еще небольшой, в материале накапливаются необратимые деформации ползучести. Для их описания применяется степенной закон ползучести Нортона [4]

$$V\left(\sigma_{ij}\right)=B\Sigma^{n}\left(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right),\quad \Sigma=\max\left|\sigma_i-\sigma_j\right|,\quad \varepsilon_{ij}^{v}=\frac{\partial V\left(\Sigma\right)}{\partial\sigma_{ij}}. \tag{2}$$

В зависимостях (2) $V(\sigma_{ij})$ — термодинамический потенциал; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{ij}^{v} — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; σ_i — главные значения тензора напряжений; B, n — параметры ползучести материала. Параметры ползучести материала в законе ползучести (2) принимаются зависимыми от температуры и имеют вид [5]:

$$B=\frac{c_1}{\sigma_0^{n-1}}\exp\left(-\frac{Q}{R_uT_0\left(1+\theta\right)}\right),\quad n=b_1+\frac{b_2}{T_0\left(1+\theta\right)},\quad \theta=\left(T-T_0\right)T_0^{-1}. \tag{3}$$

В формулах (3) c_1, σ_0, b_1 и b_2 — постоянные материала, Q — энергия активации, R_u — универсальная газовая постоянная, T, T_0 — текущая температура и температура тела в свободном состоянии.

При дальнейшем росте нагружающих усилий в некоторый момент времени t_1 на границе $r=R$ напряженное состояние выйдет на поверхность пластичности и в материале начнется пластическое течение. Будем использовать обобщенное условие пластического течения Треска — Сен-Венана [6]

$$F\left(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^{p}\right)=k,\quad F\left(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^{p}\right)=\frac{1}{2}\max\left|\sigma_i-\sigma_j\right|-\eta\max\left|\varepsilon_k^{p}\right|, \tag{4}$$

В условии (4) ε_{ij}^{p}, ε_k^{p} — компоненты тензора скоростей пластических деформаций и его главные значения соответственно; k — предел текучести; η — коэффициент вязкости.

Также как и параметры ползучести предел текучести и коэффициент вязкости принимаются зависимыми от температуры. Считаем, что для них выполняются соотношения [7]:

$$k=k_0\left(1-\frac{\theta}{\theta_m}\right)^2,\quad \eta=\eta_0\,\mathrm{Exp}\left(-\upsilon T_0\theta\right),\quad \theta_m=(T_m-T_0)T_0^{-1}. \tag{5}$$

В (5) T_m — температура плавления материала, k_0, η_0 — предел текучести и вязкость материала при комнатной температуре, υ — экспоненциальная скорость.

Источником повышения температуры в материале являются необратимые деформации. Для температуры примем следующие условия

$$\theta\left(r,0\right)=0,\quad \left.\frac{\partial\theta\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\quad \left.\frac{\partial\theta\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R}=0.$$

Данная задача сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных, для решения которой используется конечно-разностный метод.

Получено решение данной краевой задачи при возрастающем перепаде давления. Затем с некоторого момента времени t_2 перепад давления полагается постоянным $p(t)=\alpha t_2$. В этом случае также найдены все параметры напряженно-деформированного состояния. С момента времени t_3 перепад давления убывает по закону: $p(t)=\alpha t_2-\alpha_1(t-t_3)$. При убывающей нагрузке рассмотрено торможение вязкопластического течения и разгрузка среды после остановки течения. После полного снятия нагрузки вычислены все параметры вплоть до полного остывания материала.

Заключение

В данной работе рассмотрена постановка и получено решение неизотермической краевой задачи теории больших деформаций о необратимом деформировании материала в круглой трубе под действием переменного перепада давления. Повышение температуры материала происходит только вследствие необратимого деформирования, то есть отсутствуют другие источники теплопроизводства в виде трения о границу или притока тепла извне. Так как задача решается в квазистатическом приближении, то нагрев материала при таких условиях оказывается незначительным.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FWFW-2021-0005, FWFW-2022-0002).

Литература

1. *Буренин А. А.* Большие необратимые деформации и упругое последействие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток : Дальнаука, 2013. – 312 с.
2. *Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В.* О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 87–93.
3. *Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В.* Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // ДАН. – 2016. – Т. 470, № 3. – С. 275–278.
4. *Norton F. H.* The Creep of Steel at High Temperatures / F. H. Norton. – New York : McGraw Hill Book Company, 1929. – 110 p.
5. *Alain I.* The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence / I. Alain // Journal of Materials Science. – 1998. – V. 33. – P. 3201–3206.
6. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
7. *Pla F.* Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio / F. Pla, A. M. Mancho, H. Herrero // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2009. – V. 238, I. 5. – P. 572–580.

УДК 624.21:533.6; 699.83

ОСОБЕННОСТИ УЧЕТА ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ РАСЧЁТЕ СТАЛЬНЫХ БАЛОК ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ МОСТОВ

В. А. Козлов, А. В. Козлова

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Одной из основных задач промышленно-гражданского и транспортного строительства является подбор компактного, экономичного и надёжного сечения конструктивных элементов. Одним из способов обеспечить выполнение этой задачи является использование имеющегося ресурса несущей способности посредством допущения развития ограниченных пластических деформаций в сечениях стальных элементов. В работе анализируются различные подходы к решению вопроса и приводится ряд факторов, которые необходимо учитывать при проектировании сечений для нового строительства с учётом работы стальных конструкций при ограниченном развитии пластических деформаций.
Ключевые слова: металлические мостовые балки, пластические деформации, методики расчёта, стальные конструкции.

Введение

Задача подбора компактного надежного сечения как в промышленном и гражданском, так и транспортном строительстве не теряет актуальности. Одним из способов решения этой задачи является учет резервов несущей способности, связанных с ограниченным развитием пластических деформаций в элементе.

В отечественной практике расчета стальных мостовых конструкций ограниченное развитие пластических деформаций подразумевается и заложено в виде эмпирических коэффициентов, повышающих значения предельно допустимых усилий в элементах. Однако в явном виде значения ограничений не представлены, что затрудняет работу инженера, пользующегося современными численными методами расчета, предоставляющими широкие возможности решения смешанных задач теории упругости и пластичности. По этой причине видится необходимым предоставить инженеру методику, в которой будут даны рекомендации по учету возможности развития пластических деформаций с конкретными ограничениями для каждого класса задач (расчетов по первой и по второй группе предельных состояний, а также возможности учета запредельной работы сечений).

Данная статья посвящена анализу накопленного опыта учета упруго-пластической работы стали и разработке методики для расчета мостовых конструкций, которая бы, с одной стороны, отвечала требованиям действующих нормативных документов, с другой – не была излишне консервативной и позволила добиться желаемого экономического эффекта.

1. Зарубежный и отечественный подходы к учету ограниченных пластических деформаций стальных конструкций

На рис. 1 представлена диаграмма растяжения стали 15ХСНД — одной из наиболее широко применимых в современном мостовом строительстве. Вертикальными линиями обозначены заложенные в разных действующих отечественных и зарубежных нормативных документах ограничения пластических деформаций от расчетных нагрузок. По диаграмме можно оценить ресурс несущей способности, лежащий за пределом упругости, и увидеть, какой большой ресурс деформационной способности до разрушения имеет сталь. В то же время следует помнить, что реальные конструкции неизбежно имеют начальные несовершенства формы (геометрические) и материала (физические), что приводит к снижению фактической несущей способности относительно теоретической и требует ограничения пластических деформаций допустимыми пределами. Кроме того, конструкции пролетных строений должны обеспечивать плавность проезда, что невозможно при больших пластических деформациях.

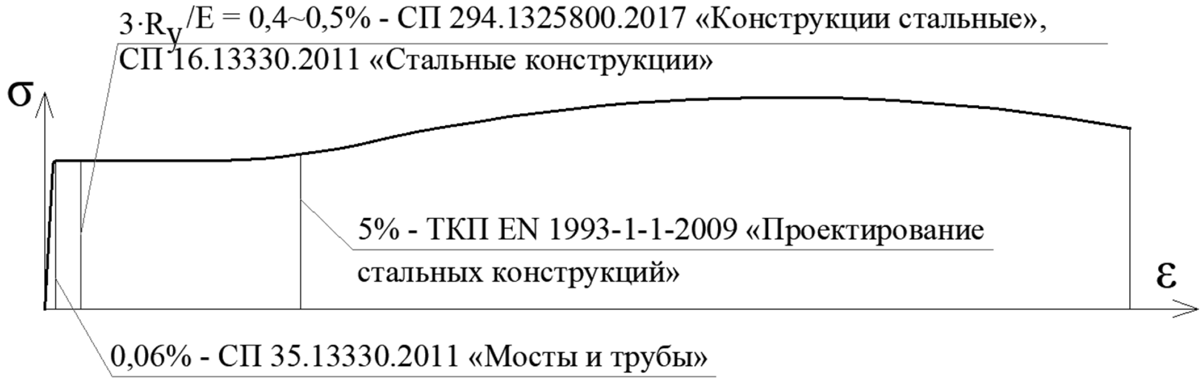


Рис. 1. Диаграмма растяжения стали 15ХСНД

Также по рис. 1 видно, что на сегодняшний день СП 35.13330, регламентирующий проектирование мостов, предлагает крайне консервативный подход, в котором пластические деформации от расчетных нагрузок ограничены величиной 0,06 %, а также не предусмотрено увеличение пластических деформаций для расчетов на особые воздействия.

В то же время, общестроительные нормативные документы по проектированию стальных конструкций СП 16.13330 и СП 294.1325800, а также американские AASHTO LRFD Bridge design specification и европейские EN 1993-1-1, EN 1993-1-2 нормы предполагают принципиально другой подход к ограничению пластических деформаций, в котором сечения делятся на классы в зависимости от способности развивать ограниченные пластические деформации и образовывать пластический шарнир до потери устойчивости (см. табл. 1) и предлагаются рекомендации по конструированию и расчету для каждого класса в отдельности.

Отечественная школа проектирования стальных конструкций не допускает развития пластического шарнира. В соответствии с СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции» учет пластических деформаций для сечений 2 и 3 классов осуществляется введением коэффициента $c_x > 1$:

$$\frac{M}{c_x \beta W_{xn,min} R_y \gamma_c} \leq 1, \quad (1)$$

Но расчет по формуле (1) никогда не даст полную пластику в сечении, т. к. $c_x W_{xn,min} < W_{x,pl}$, где $W_{x,pl}$ — пластический момент сопротивления. Таким образом 3-й класс в отечественной нормативной базе существует только теоретически.

Зарубежные нормативы (на основе проанализированных норм США и Европы) предлагают сразу проектировать сечение с определенной геометрией (соотношением ширины и толщины свесов поясов и стенок), что позволит обеспечить определенный класс по развитию пластических деформаций (см. табл. 2).

Такой подход имеет ряд преимуществ, но из стали в мостовых сооружениях выполняются как правило пролетные строения. Стальные балки пролетных строений двутаврового или коробчатого сечения работают на изгиб и будут наиболее экономичными, если основная масса металла в сечении будет сосредоточена в поясах для получения наибольшего момента сопротивления сечения при наименьшей материалоемкости, т.е. использование компактных балок, способных образовывать пластический шарнир, нецелесообразно.

Таблица 1

Классификация сечений по развитию пластических деформаций

СП16.13330.2011 «Стальные конструкции»	**AASHTO**	**EN**
Класс 1 НДС, при котором напряжения по всей площади сечения не превышают расчетного сопротивления стали $\|\sigma\| \leq R_y$ (упругое состояние сечения);	**Некомпактное сечение (Noncompact Section)** Сечение, которое может образовать в крайних фибрах пластическую деформацию, но развитие пластического шарнира невозможно вследствие потери местной устойчивости элементов.	**Класс 4** Потеря местной устойчивости наступает до достижения предела текучести в одной или более зонах поперечного сечения
Класс 2 НДС, при котором в одной части сечения $\|\sigma\| < R_y$, а в другой $\|\sigma\| = R_y$ (упруго-пластическое состояние сечения)		**Класс 3** Напряжение в крайних сжатых волокнах стального элемента при упругом распределении напряжений может достигнуть предела текучести, но потеря местной устойчивости препятствует развитию пластических деформаций
		Класс 2 Могут развиваться пластические деформации, но в сечении ограничена вращательная способность вследствие потери местной устойчивости
Класс 3 НДС, при котором по всей площади сечения $\|\sigma\| = R_y$ (пластическое состояние сечения, условный пластический шарнир)	**Компактное сечение (Compact Section)** Сечение, которое может образовать пластический шарнир без местной потери устойчивости элементов.	**Класс 1** Может образоваться пластический шарнир с вращательной способностью, требуемой для пластического расчета и достигаемой без снижения несущей способности

С нормативной точки зрения, применительно к классификации Приложения В СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции», мостовые конструкции входили бы в первую группу стальных конструкций, характеризующуюся тяжелыми условиями работы, в частности наличием подвижной нагрузки и циклических усилий. Для таких конструкций СП 16.13330 «Стальные конструкции» ограничивает развитие пластических деформаций вплоть до полного их отсутствия.

2. Факторы, влияющие на величину допустимых пластических деформаций

2.1. *Форма сечения* влияет на допущение развития пластических деформаций. В большинстве случаев для мостов со сплошными балками стальные элементы — это симметричные относительно одной оси сечения типа двутавра с широким верхним поясом, представляющим собой участки ортотропной плиты проезжей части (коробчатое сечение при расчете на изгиб может быть приведено к соответствующему двутавровому). Сама по себе степень несимметричности сечения влияет на характер распределения напряжений. Для сечений, симметричных относительно двух осей, возможно допущение развития пластических деформаций в

Таблица 2

Сравнение требований к сечениям, способным развивать пластические деформации

№	Требования к элементам сечений	Формула		
		AASHTO	Класс	EN
1	Требования к свесам поясов b_f и t_f — ширина и толщина свеса	$\frac{b_f}{t_f} > 11{,}1 \cdot \sqrt{235 / R_y}$	1	$\frac{b_f}{t_f} \le 9 \cdot \sqrt{235 / R_y}$
			2	$\frac{b_f}{t_f} \le 10 \cdot \sqrt{235 / R_y}$
		$\frac{b_f}{t_f} \le 11{,}1 \cdot \sqrt{235 / R_y}$	3	$\frac{b_f}{t_f} \le 14 \cdot \sqrt{235 / R_y}$
2	Требования к стенкам балок b_w и t_w — ширина и толщина стенки	$\frac{b_w}{t_w} > 102 \cdot \sqrt{235 / R_y}$	1	$\frac{b_w}{t_w} \le 72 \cdot \sqrt{235 / R_y}$
			2	$\frac{b_w}{t_w} \le 83 \cdot \sqrt{235 / R_y}$
		$\frac{b_w}{t_w} \le 102 \cdot \sqrt{235 / R_y}$	3	$\frac{b_w}{t_w} \le 124 \cdot \sqrt{235 / R_y}$

меньшем объеме, чем для моносимметричных сечений, т. к. в менее развитом поясе рано наступает текучесть. Для прочностных расчетов по нормативной методике, это учтено введением коэффициента формы $æ_1$, повышающим несущую способность. Проверить, допускается ли развитие пластических деформаций в сечении, можно по табл. 3.

Таблица 3

Параметры сечений, допускающие учет развития ограниченных пластических деформаций

$\frac{A_{f,min}}{A_w}$	0 (тавр)	$\le 0{,}1$	$> 0{,}1$ $\le 0{,}5$	$> 0{,}5$ $\le 1{,}0$	$> 1{,}0$ $\le 4{,}0$	$> 4{,}0$ $\le 5{,}0$
$\frac{A_{f,min} + A_w}{A}$	Без ограничений	$\le 0{,}9$	$\le 0{,}8$	$\le 0{,}7$	$\le 0{,}6$	$\le 0{,}5$

Примечания: 1) A_w — площадь стенки, $A_{f,min}$ — площадь наименьшего из поясов (полок), A — площадь сечения. Все значения брутто.

2) Для коробчатых сечений площадь A_w принимают равной сумме площадей стенок.

В случае с моносимметричными двутаврами с одним развитым по ширине поясом за упругой работой следует односторонняя текучесть, которая, если раньше не происходит потеря устойчивости, сменяется двусторонней текучестью. При нарастании пластических деформаций нейтральная ось сечения смещается, а потому меняются жесткостные характеристики.

Также из-за значительного развития верхнего пояса по ширине, большую роль играет неравномерность распределения напряжений в полках — эффект сдвигового запаздывания (shear lag effect), без учета которого невозможно правильно определить жесткость сечения. Параметры редуцированного сечения будут зависеть от величины допустимых пластических деформаций.

2.2. Большое значение для определения границ допустимого развития пластики в сечении играет *фактор нагрузки*. При расчетах по второй группе предельных состояний с применением коэффициента надежности по нагрузке $\gamma_f = 1$ не следует допускать выход за пределы упругой работы сечения.

В то же время при расчетах по первой группе предельных состояний на постоянные и временные (транспортные, пешеходные, климатические) нагрузки коэффициенты надежности учитывают риски, связанные с возможными отступлениями реальной конструкции от теоретической модели, поэтому можно ограничить пластические деформации величиной, не влияющей на эксплуатационные качества конструкции.

Если же расчет ведется на пропуск сверхнормативной нагрузки, на работу в чрезвычайных ситуациях или выполняется проверка живучести конструкции, то границы пластических деформаций могут быть расширены и приведены в соответствие с СП294.1325800 $\varepsilon_{pl} = 3 \cdot R_y / E = 0,004 \sim 0,005$.

2.3. Еще одним *фактором*, который важно учитывать при проектировании и расчете, является резерв деформационной способности до разрушения *материала* — стали конкретной марки. При применении высокопрочных сталей с соотношением расчетных сопротивлений по временному сопротивлению и пределу текучести $Ru / Ry \leq 1,30$ ($Ry > 600$ МПа) из-за малой величины площадки текучести следует ограничиваться упругой работой сечения.

2.4. Упомянутые выше начальные несовершенства разного происхождения также влияют на способность сечения развивать пластические деформации. Для разработки обобщенной методики учета несовершенств требуется анализ текущей ситуации в отрасли. Однако вследствие отсутствия реальной статистики можно задаться допущениями, которые приводятся в соответствующих ГОСТ на материалы, прокат и изделия.

Есть и другие факторы, влияющие на напряженно-деформированное состояние, а значит и на резерв несущей способности за пределом упругости. Например, большую роль играют остаточные напряжения от сварки, т.к. мостовые балки, как правило, представляют собой не прокатный профиль, а сварное составное сечение с листами толщиной по 20–30 мм.

3. Пример расчета стальной двутавровой балки

Для анализа разных методик и сравнения мостовых и общестроительных норм в части проектирования стальных конструкций были выполнены расчеты нескольких стальных балок двутаврового сечения с разным соотношением толщины и длины свеса полки. Рассмотрим в качестве примера расчет двутавровой моносимметричной балки класса прочности С325 полной длиной 6 м, изгибаемой сосредоточенной нагрузкой в середине пролета, с верхним поясом размерами 450×8, нижним — 300×14, и стенкой 300×14 мм. В соответствии с классификацией табл. 1–2 сечение теряет устойчивость до наступления текучести в крайней фибре сечения. Результаты расчета представлены в табл. 4.

Таблица 4

Пример расчета двутавровой балки по действующим нормативам

	ГОСТ Р 59623		**СП16.13330**	
Учет ограниченных пластических деформаций	нет	да	нет	да
Предельно допустимая сосредоточенная сила из условия прочности, $P_{пр}$, т	25,91	27,46	25,91	34,05
Предельно допустимая сосредоточенная сила из условия общей устойчивости, $P_{уст}$, т	19,5		26,68	
Проверка местной устойчивости стенки	обеспечена		обеспечена	
Проверка местной устойчивости полки	не обеспечена		не обеспечена	

Примечание: для получения значений табл. 4 сравнивалась только методика расчета, свойства стали 09Г2С приняты в обоих случаях в соответствии с рекомендациями ГОСТ Р 52963-2021; конечноэлементные расчеты проводились в ПК ЛИРА-САПР.

Расчеты по нормативной методике и МКЭ по пластинчатой модели показывают близкие результаты при расчете напряжений и, соответственно, критической разрушающей силы при проверке прочности. Расчет общей устойчивости по нормативным методикам дает значения критической силы на 10–30 % меньшие, чем расчет МКЭ ($P_{кр} = 29{,}4$ т). Причина заключается в отсутствии учета начальных несовершенств при расчете МКЭ, т. к. в реальной практике небольшое смещение нагрузки относительно оси стенки балки существенно снижает устойчивость (как местную у сжатого пояса, так и общую). Решением этой проблемы может являться выдача рекомендаций по заданию эксцентриситета приложения нагрузок на изгибаемые элементы, по аналогии с методикой, предложенной в СП 294.1325800 для сжатых стержней. Данные несовершенства имеют случайный характер и подчиняются статическим закономерностям, поэтому их следует принимать на основании опытных данных.

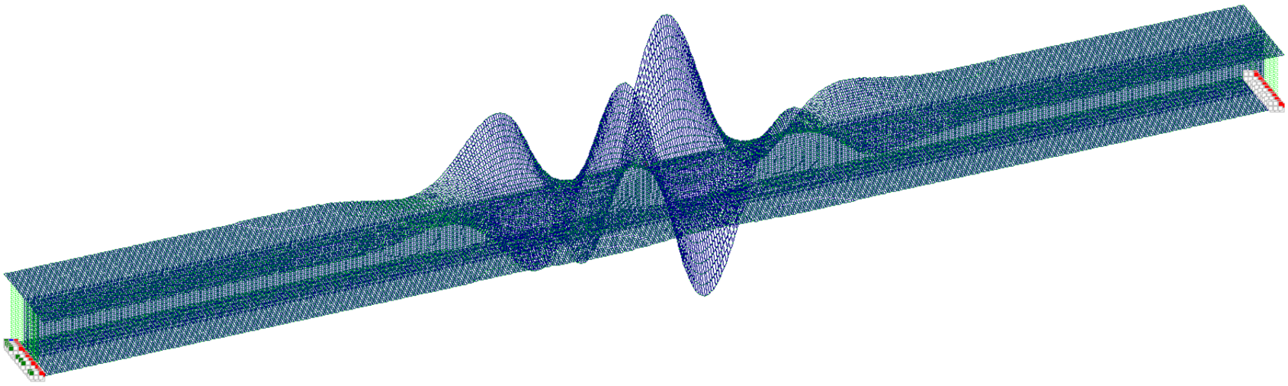


Рис. 2. Схема потери местной устойчивости сжатого пояса изгибаемой двутавровой балки

Выводы

Проведенный анализ показал, что при расчетах мостовых конструкций:

– значительные пластические деформации (> 0.06 % при расчетных нагрузках) не допускаются в связи с циклическим характером нагружения и требованием обеспечить плавность проезда;

– при допущении упруго-пластической работы сечения необходимо обеспечить как возможность к повороту сечения без потери устойчивости (геометрические требования), так и достаточную площадку текучести материала ($R_u / R_y > 1{,}30$);

– расчеты численными методами (например, методом конечных элементов — наиболее используемым в инженерной практике на сегодняшний день) необходимо учитывать не только нелинейность работы материала, но и начальные несовершенства формы и приложения нагрузки; при составлении расчетных моделей важную роль играет правильное назначение жесткостных характеристик редуцированных сечений, т. к. при переходе к упругопластической работе жесткость меняется;

– дополнительно требуется рассмотреть тепловые и структурные деформации, полученные в результате сварки, т.к. они оказывают значительное влияние на напряженно-деформированное состояние.

Литература

1. *Потапкин А. А.* Проектирование стальных мостов с учетом пластических деформаций. – М. : Транспорт, 1984.

2. *Корнеев М. М.* Стальные мосты. Теоретическое и практическое пособие по проектированию мостов. – Киев : Академпрес, 2010.

3. *Белый Г. И., Гарипов А. И.* Запредельные НДС в поперечных сечениях элементов стальных конструкций // Вестник гражданских инженеров. – 2022. – № 4. – С. 16–30.

4. *Белый Г. И., Гарипов А. И.* Запредельная несущая способность стержневых элементов стальных конструкций после потери общей устойчивости // Вестник гражданских инженеров. – 2022. – № 5. – С. 5–19.

5. *Liang Chen, Siwei Liu.* Geometric and material nonlinear analysis of steel members with nonsymmetric sections // Journal of Constructional Steel Research. – 2022. – № 2.

6. *Ronald D Ziemian, Hannah Blum*. Analysis of non-symmetric cross-sections relative to the provisions of AISC 360-10 // Conference: Proceedings of the Annual Stability Conference Structural Stability Research. – 2020.

7. *Graziano Fiorillo, Michel Ghosn*. Failure Analysis of Continuous Highway Steel I-Multigirder Bridges under the Combined Effect of Fatigue and Overloading Events. – J Bridge Eng. – 2025. – № 1.

8. *Al-Emrani M, Aygul M.* Fatigue design of steel and composite bridges. – Göteborg, Sweden: Chalmers University of Technology. – 2014. – № 10. – P. 166.

УДК 624.044

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО МЕТОДУ «ТЯЖИ И РАСПОРКИ»

В. А. Козлов, С. Ю. Струков

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В работе приведены основные положения и этапы развития инженерного метода расчета по модели «Тяжи и распорки», полученные на основании изучения отечественного и зарубежного опыта проектирования. Предложен алгоритм построения расчетной модели данного метода с описанием каждого из его этапов. Отдельно рассматриваются основные положения и допущения, на которых основывается конструирование элементов расчетной модели метода. В выводах изложены факторы, позволяющие адаптировать данный метод расчета к требованиям отечественных норм проектирования, с учетом проведения дополнительных экспериментальных исследований масштабных моделей.

Ключевые слова: метод расчета, тяжи и распорки, узловые элементы, расчетная модель, области напряжений, статическая неоднородность, железобетонные элементы.

Введение

Специализированный инженерный метод расчета «тяжи и распорки» («Struts-and-ties» model) берет свое начало от известной модели «ферменной аналогии», предложенной практически одновременно в начале XX века Мёршем и Риттером для расчета прочности наклонных сечений [1–2]. Данный метод расчета носит название метода Риттера — Мёрша или метода «стержневой модели» или метода «ферменной аналогии». Расчетная схема, принятая в данном методе, представляет собой статически определимую ферму, верхний пояс которой воспринимает равнодействующую сжимающих напряжений (в сжатой зоне бетона), а нижний пояс воспринимает равнодействующую растягивающих напряжений, возникающих в продольной арматуре. При этом пояса фермы объединены сжатыми бетонными подкосами, выделенными по длине зоны среза соседними диагональными трещинами, а также растянутыми подкосами, которые моделируют поперечное армирование. Представление железобетонного элемента с трещинами в виде фермы с параллельными поясами основано на характерном распределении сжатых и растянутых полей напряжений, возникающих вследствие воздействия внешней нагрузки. Модель ферменной аналогии в соответствии с гипотезой плоских сечений позволяет определить сопротивление поперечной силе, полагая равномерное распределение сжимающих и растягивающих напряжений по всему конструктивному элементу. При таком подходе в рамках «ферменной аналоги» не рассматриваются части железобетонного элемента, в которых возникает неравномерное распределение напряжений вследствие геометрической или статической неоднородности. Также общепринятая модель «ферменной аналогии» не учитывает появление пластических деформаций при работе элемента с трещинами. Все эти факторы накладывают определенные ограничения на использование метода «ферменной аналогии».

Появление и последующие развитие в 30-е годы XX века теории пластичности позволило трансформировать «стержневую модель» в модель метода «Тяжи и распорки». Основные положения усовершенствованной модели применимы в первую очередь для расчета на действие поперечных сил областей железобетонного элемента с неравномерным распределением напряжений. При этом метод «тяжи и распорки» не противоречит классической модели «ферменной аналогии» и может быть применим для расчета на срез всего конструктивного элемента.

Модель метода «Тяжи и распорки» реализована во многих зарубежных нормативных документах, однако в отечественных нормах проектирования она не представлена, вследствие чего развитие методики расчета по данной модели будет актуально для инженеров, занимающихся проектированием железобетонных конструкций промышленно-гражданского и мостового строительства.

1. Основные положения метода «Тяжи и распорки»

Расчетная модель метода «тяжи и распорки» основывается на действительной физической модели работы железобетонного элемента под внешней нагрузкой. В соответствии с данной расчетной моделью рассматриваемый элемент представляется в виде совокупности растягивающих полей напряжений, возникающих в бетоне и арматуре («тяжей») и сжимающих полей, возникающих в бетоне («распорок»), а также соединительных узлов.

Основными элементами расчетной модели являются:

1. распорки (struts) — равнодействующие сжимающих напряжений;
2. тяжи (ties) — равнодействующие растягивающих напряжений;
3. соединительные узловые элементы (nodes), являющиеся пересечением тяжей и распорок. В данных элементах происходит перераспределение напряжений.

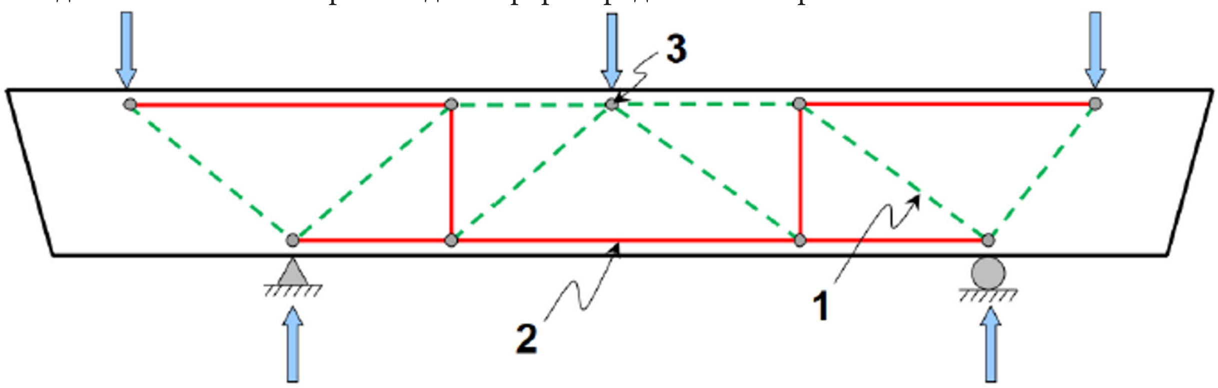


Рис. 1. Основные элементы модели метода «Тяжи и распорки»

Основные положения модели «Тяжи и распорки» базируются на следующих допущениях:

– геометрические параметры модели определяются исходя из действительной системы полей напряжений в упругой стадии работы конструктивного элемента;

– усилия в растянутых и сжатых элементах модели определяются на основании статической схемы расчета элемента

– расчет растянутых и сжатых элементов на прочность выполняется в соответствии с положениями теории пластичности.

Железобетонные элементы при расчете по методу «тяжи и распорки» разделяются на B-области (B от Бернулли), в которых напряжения распределены равномерно и используется гипотеза плоских сечений, и D-области (D от discontinuity), для которых характерно нелинейное распределение напряжений. D-области располагаются вблизи мест приложения сосредоточенных нагрузок, а также вблизи опор. Пример разделения элемента на B и D-области приведен на рис. 2.

В общем случае считается, что в элементе преобладает нелинейное распределение напряжений, если участок среза (расстояние от точки опирания до точки приложения нагрузок для простых балок) не более 2–2,5 характерных толщин элемента. Также стоит отметить, что нелинейное распределение напряжений характерно для элементов с геометрической и статической неоднородностью. Под геометрической неоднородностью понимаются отверстия в конструкции, углы, а также перепады размеров (рис. 3). Статической неоднородностью являются точки приложения внешних нагрузок и зоны опирания и т. п. Также часто встречаются элементы одновременно со статической и геометрической неоднородностями (рис. 4).

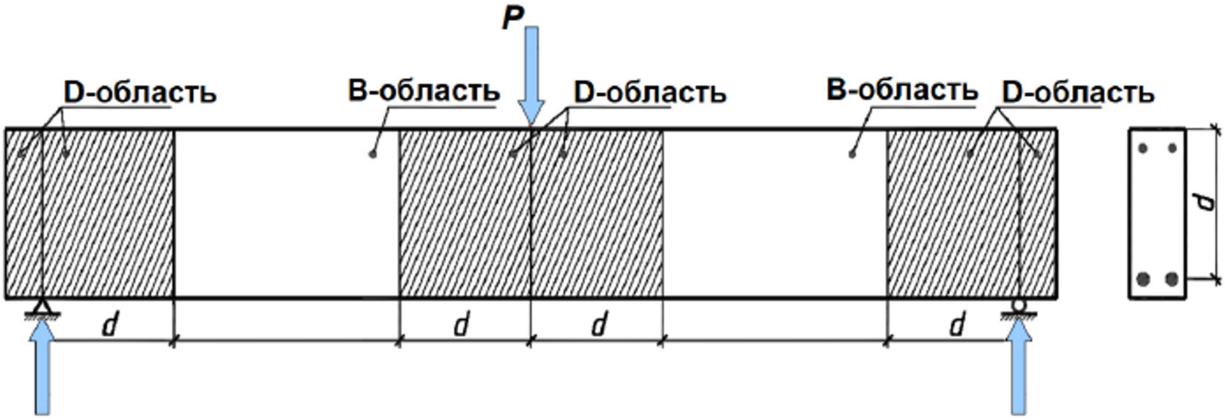


Рис. 2. Пример разделения железобетонной изгибаемой балки на B и D-области

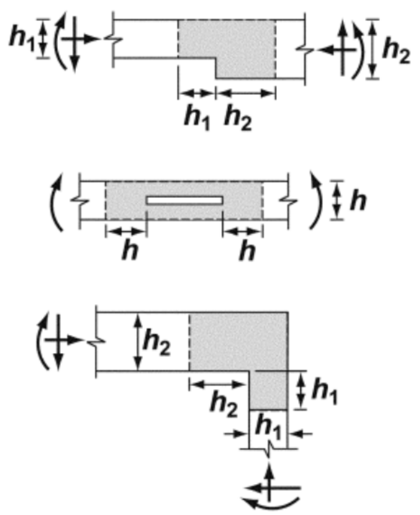


Рис. 3. Примеры геометрических неоднородностей, согласно принципу Сен-Венана

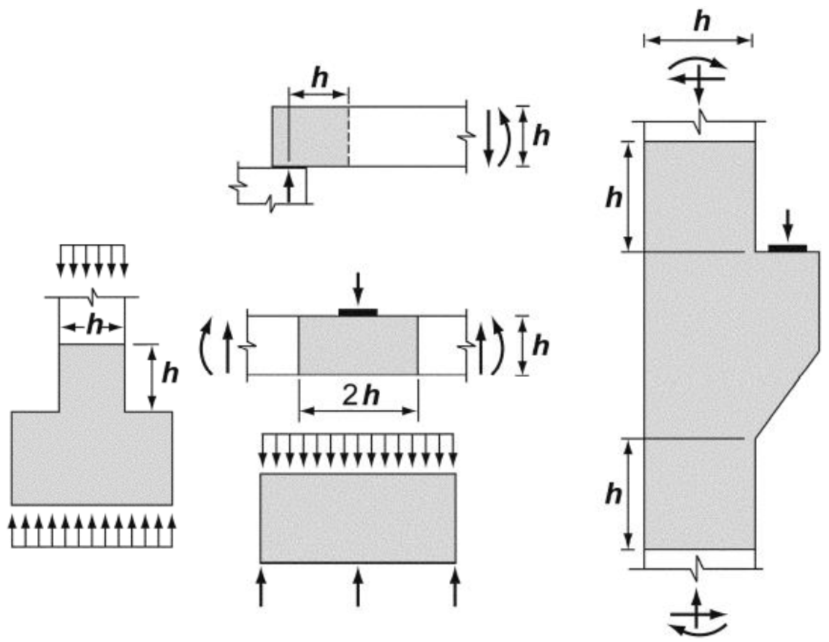


Рис. 4. Примеры совмещения статических и геометрических неоднородностей, в соответствие с принципом Сен-Венана

Стоит отметить, что в некоторых случаях вся железобетонная конструкция может представлять собой D-область. Такая ситуация характерна для коротких балок и других небольших конструктивных элементов (подферменников, опорных плит и т. д.).

2. Алгоритм расчета по методу «Тяжи и распорки»

Порядок расчета железобетонных (в т. ч. и предварительно напряженных) элементов в D-областях на основании требований зарубежных нормативных документов наглядно может быть представлен в виде блок-схемы, представленной на рис. 5.

Стоит отметить, что определение геометрических параметров модели (этап 3) выполняется на основе предварительного расчета предельной поперечной силы, при которой образуются трещины в эксплуатационный период, после чего назначается положение тяжей и распорок в первом приближении. Конструирование тяжей и распорок, а также узловых элементов выполняется на основе проверки прочности в предельной стадии работы соответствующего элемента, после чего при необходимости производится корректировка первоначальной расчетной модели.

Рис. 5. Блок-схема выполнения расчета по методу «Тяжи и распорки»

Анализируя действующие зарубежные нормативные документы, можно сделать вывод о том, что общая концепция модели метода «Тяжи и распорки» в целом соответствует алгоритму в представленной выше блок-схеме. Однако на отдельных этапах существуют значительные расхождения, которые говорят об отсутствии единого подхода к процессу расчета.

2.1. Разработка модели «Тяжи и распорки»

Определение геометрических параметров расчетной модели является самым важным этапом расчета, от которого зависит достоверность и длительность его проведения. На рис. 6 представлена модель метода «Тяжи и распорки» для однопролетной шарнирно опертой балки, загруженной сосредоточенной силой в середине пролета.

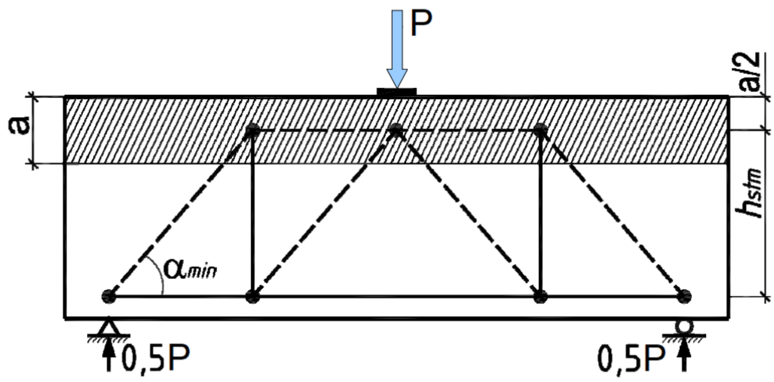


Рис. 6. Пример построения расчетной модели метода «Тяжи и распорки»

Построение расчетной модели обычно осуществляется следующими способами, выбор которого зависит от варианта загружения и сложности модели:

1. С использованием принципа «траектории эффекта нагрузки», который учитывает места расположения сосредоточенных сил и опорных реакций;
2. На основании характерной схемы образования трещин;

3. С помощью расчета в любом программно-вычислительном комплексе на основе метода конечных элементов, который позволяет наглядно показать систему сжатых и растянутых полей в условиях конкретного нагружения модели.

Вне зависимости от выбранного способа построения расчетной модели должны соблюдаться следующие требования:

1. Распорки представляют собой равнодействующие полей сжимающих напряжений, а тяжи — равнодействующие растягивающих напряжений;
2. Тяжи расположены в центре тяжести растянутой арматуры;
3. Минимально допустимый угол между наклонными распорками и тяжами должен составлять 25°. Данное требование имеется только в нормативных документах США и введено для недопущения значительных напряжений в арматуры и сдерживания развития диагональных трещин;
4. Количество и длина вертикальных тяжей должно быть минимальным;
5. Расположение и направление тяжей и распорок должны быть ориентированы в соответствии с линейной теорией упругости;
6. Призматическая распорка должна быть расположена в середине высоты сжатой зоны;
7. Созданная расчетная модель должна находиться в равновесии.

Необходимо также отметить тот факт, что для конкретной схемы нагружения и геометрических характеристик элемента может быть получено несколько разных расчетных моделей. Для уточнения расположения тяжей и распорок в расчетной модели рекомендуется применять любой программно-вычислительный комплекс на основе метода конечных элементов.

2.2. Конструирование и расчет тяжей и распорок

При конструировании и расчете сопротивления растянутых тяжей в расчетной модели метода необходимо руководствоваться требованиями, которые изложены в американских нормативных документах [5]. В большинстве случаев расположение тяжей совпадает с центром тяжести растянутой арматуры, именно поэтому конструирование и расчет сопротивления тяжей является наименее спорным вопросом в модели «Тяжи и распорки». На рис. 7, 8 представлены пример расположения растянутых тяжей в расчетной модели.

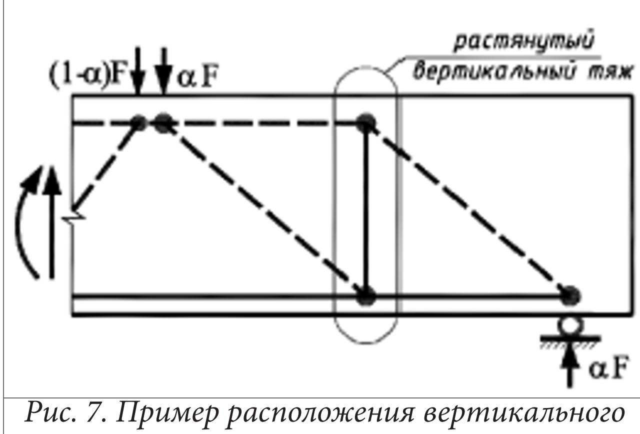


Рис. 7. Пример расположения вертикального тяжа в расчетной модели

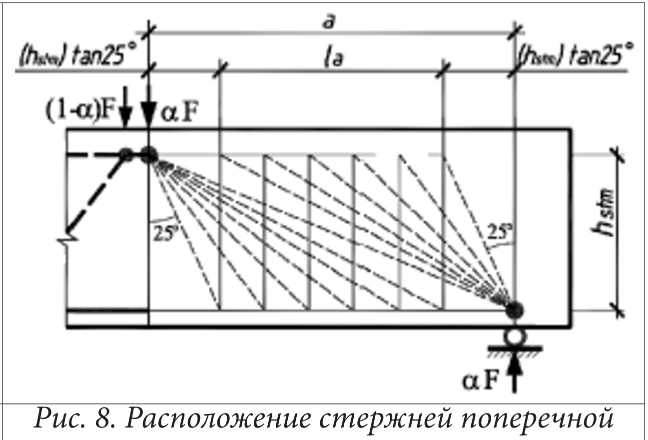


Рис. 8. Расположение стержней поперечной арматуры в элементе

Согласно требованиям ACI сопротивление осевому растяжению для тяжей определяется из следующего выражения:

$$F_{nt} = f_y \cdot A_{ts} + A_{tp} \cdot (f_{se} + \Delta f_p). \tag{1}$$

Похожая по физическому смыслу формула приведена в швейцарских нормативных документах:

$$F_{td} = f_{yd} \cdot A_s + A_p \cdot (f_{pd} - \sigma_{p0}). \quad (2)$$

В выражениях (1), (2) первое слагаемое — это произведение площади поперечного сечения ненапрягаемой арматуры на пределе текучести, а второе слагаемое — аналогичное произведение для напрягаемой арматуры с учетом потерь и различных корректировок, принятых в соответствующих нормах проектирования.

В общем случае предельное усилие в сжатой распорке определяется из выражения:

$$F_{u,str} = f_{\max,strut} \cdot A_{c,strut}, \quad (3)$$

где $f_{\max,strut}$ — предельное напряжение сжатой бетонной распорки, определяемое по-разному в зависимости от требований соответствующего нормативного документа, $A_{c,strut}$ — площадь поперечного сечения бетона распорки.

2.3. Конструирование и проверка прочности узловых элементов

В узловых элементах модели, являющимися точками пересечения тяжей и распорок, происходит перераспределение напряжений между элементами модели, в результате которого вся система находится в равновесии. В связи с тем, что данное перераспределение происходит в достаточно ограниченной области, в пределах узловых элементов возникают значительные напряжения.

В зависимости от типов структурных элементов, которые сходятся в узлах модели (сжатые распорки (C — compression), растянутые тяжи (T — tension)), согласно требованиям зарубежных норм выделяют четыре вида узловых элементов (рис. 9):

1. узел CCC, который образован только сжатыми распорками;
2. узел CCT, в котором сходятся сжатые распорки и растянутый тяж, ориентированный в одном направлении;
3. узел CTT, в котором сходятся сжатая распорка и растянутые тяжи, ориентированные в двух направлениях;
4. узел TTT, который образован только растянутыми тяжами. В связи с тем, что данный узел практически не встречается, требований к его расчету в нормативных документах не представлено.

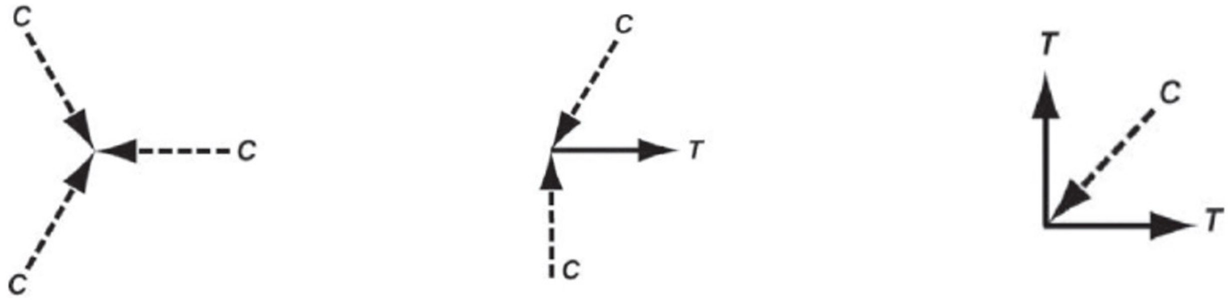


Рис. 9. Типы узлов модели метода

Конструирование всех типов узлов модели «Тяжи и распорки» должно выполняться в соответствии с требованиями следующих правил:

1. Каждый узловой элемент ограничен тремя поверхностями, по которым действуют напряжения;
2. Усилия, которые возникают на каждой поверхности, должны быть направлены перпендикулярно рассматриваемой поверхности по линии, проходящей через центр ее тяжести;
3. В узле должно сходиться не более трех структурных элементов;
4. При конструировании узла типа CCC допускается рассматривать отдельно правая и левая части (для упрощения расчета)

5. Несущая способность узловых элементов должна быть достаточной, чтобы воспринимать возникающие в них напряжения без разрушения бетона.

Предельное усилие, воспринимаемое поверхностью узла, определяется из соотношения:

$$F_{u,node} = f_{\max,node} \cdot A_{c,node}, \tag{4}$$

где $f_{\max,node}$ — предельное сжимающее напряжение, возникающее на поверхности узла, $A_{c,node}$ — площадь поперечного сечения бетона узловой поверхности.

Стоит отметить тот факт, что подходы к определению величины предельных напряжений в разных зарубежных нормативных документах существенно отличаются.

2.4. Назначение армирования для обеспечения требований трещинностойкости

Конструирование армирования для ограничения ширины раскрытия трещин при воздействии эксплуатационных нагрузок регламентируется только нормативными документами США. Минимальный процент армирования для стержней, расположенных в вертикальном и горизонтальном направлении, определяется из соотношения:

$$p_{sv} = \frac{A_v}{b_w \cdot s_v} \geq 0.003; \;\; p_{sh} = \frac{A_h}{b_w \cdot s_h} \geq 0.003; \tag{5}$$

где A_v, A_h — площадь поперечного сечения ограничивающей арматуры в вертикальном и горизонтальном направлении;

s_v, s_h — шаг ограничивающей арматуры в вертикальном и горизонтальном направлении, при этом $s_v, s_h \leq d/4$ или 12 дюймов;

b_w — ширина поперечного сечения конструктивного элемента.

2.5. Обеспечение требований анкеровки продольной арматуры

Выполнение данного требования проверяется в завершении алгоритма расчета железобетонных элементов по методу «Тяжи и распорки». Стоит отметить, что перераспределение напряжений в узловых элементах и реализация модели метода в целом возможно лишь при выполнения данных требований. Помимо этого, проверка прочности структурных элементов модели выполняется с учетом обеспеченности длины анкеровки продольной арматуры. Именно поэтому данных этап является одним из ключевых.

Согласно американским требованиями AASHTO, критическое сечение для определения длины анкеровки продольной арматуры в узловом элементе определяется в соответствии с рис. 10. Практические идентичные рекомендации изложены в ACI (рис. 11). В швейцарских нормативных документах существует единственное указание о том, что длина анкеровки должна соответствовать длине узла.

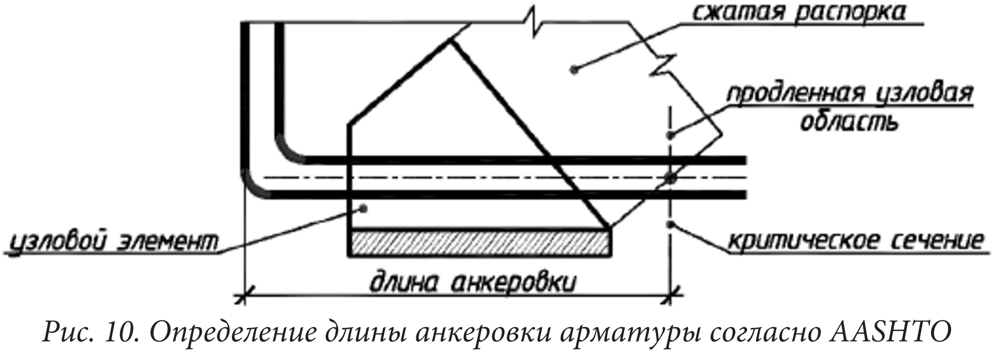


Рис. 10. Определение длины анкеровки арматуры согласно AASHTO

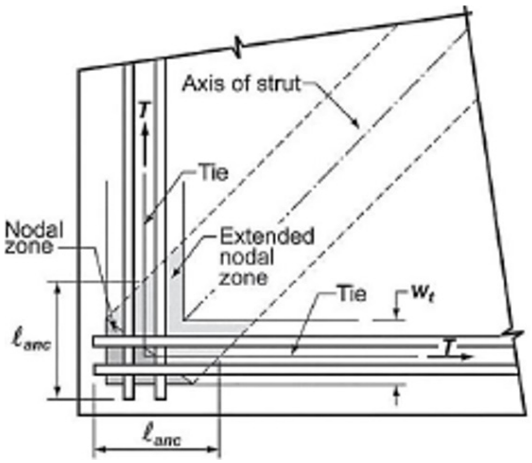


Рис. 11. Определение длины анкеровки арматуры согласно AASHTO

Заключение

На основании проведения анализа зарубежных нормативных документов, а также результатов численных расчетов и экспериментальных исследований по модели «Тяжи и распорки» можно сделать следующие выводы:

1. Модель «Тяжи и распорки» получила широкое распространение в зарубежной практике проектирования для расчета новых и существующих железобетонных (в т.ч. и преднапряженных) элементов по первой группе предельных состояний.

2. Рассматриваемая модель, несмотря на кажущуюся длительность итерационных процедур по ее созданию, в доступной форме позволяет представить сложную работу железобетонных элементов под внешней нагрузкой в виде системы центрально сжатых и центрально растянутых элементов.

3. Расчет с применением модели «Тяжи и распорки» позволяет определить сопротивление тех областей железобетонных элементов, где сосредоточенное действие внешней нагрузки оказывает существенное влияние на прочность элемента в целом. При этом концепция модели не противоречит требованиям классической модели ферменной аналогии и может быть принята для расчета всего элемента.

4. Практический опыт применения рассматриваемого метода свидетельствует о рациональной концепции модели и позволяет адаптировать его к требованиям отечественных норм проектирования. При этом возникает необходимость проведения экспериментальных исследований моделей железобетонных конструкций сложной формы (балок малых пролетов, балок-стенок, подферменников, ростверков, ригелей и т. д.), получивших широкое распространение в строительной отрасли нашей страны в настоящее время.

Литература

1. *Ritter W.* Die Bauweise Hennebique / W. Ritter // Schweizerische Bauzeitung. – 1899. – V. 33, № 7. – P. 59–61.

2. *Mörsch E.* Concrete-Steel Construction / E. Mörsch // McGraw-Hill (English translation by E. P. Goodrich). – New York, 1909.

3. ACI (American Concrete Institute) Committee 318. 2011. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318 – 11) and Commentary. – Farmington Hills, MI: ACI.

4. ACI (American Concrete Institute) Committee 318. 2014. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318 – 14) and Commentary (ACI 318R-14). – Farmington Hills, MI: ACI.

5. ACI (American Concrete Institute) Committee 318. 2019. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318 – 19) and Commentary (ACI 318R-19). – Farmington Hills, MI: ACI.

6. AASHTO LRFD Bridge Design Specifications. – 6th Edition. – Washington, 2012.

7. AASHTO LRFD Bridge Design Specifications. – 8th Edition. – Washington, September 2017.

8. fib Model Code 2010, Vol.1. – Federal Institute of Technology Lausanne – EPFL, Lausanne, March 2010.

9. Design of Concrete Structures. Part 1-1: General rules, rules for buildings, bridges and civil engineering structures: prEN 1992-1-1:2018 (Eurocode 2). – Brussel: European Committee for Standardization, April 2018. – 293 p.

10. Design of Concrete Structures. General Rules and Rules for Buildings: EN 1992-1: 2001 (Eurocode 2)/ Brussel: European Committee for Standardization, Introduced October 2001 – 230 p.

11. *Санникова О. Г.* Основные положения модели «Распорки и тяжи» для определения сопротивления срезу железобетонных элементов // Вестник Полоцкого государственного технического университета. – 2018. – № 16. – С. 19–29.

УДК 539.3

МЕТОДИКА ПРОВЕРКИ ДОСТОВЕРНОСТИ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО СООТНОШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ, УЧИТЫВАЮЩЕГО ДИЛАТАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ

В. В. Козлов[1], А. А. Маркин[1], А. В. Филатова[2]

[1]Тульский государственный университет
[2]ООО «Фидесис»

Аннотация. Рассмотрен класс определяющих соотношений нелинейно-упругих изотропных материалов, построенных в рамках частного постулата изотропии Ильюшина. Связи между напряжениями и деформациями представлены зависимостью тензора напряжений от тензора деформаций Генки. Рассмотрено определяющее соотношение, содержащее пять материальных констант, учитывающее дилатационные эффекты. Предложен подход проверки его достоверности на основе сравнения экспериментальной зависимости окружных удлинений внешней поверхности толстостенной трубы от внутреннего давления (задача Ламе) с соответствующей теоретической зависимостью. Приведенная методика может быть распространена на различные определяющие соотношения нелинейно-упругих материалов.
Ключевые слова: нелинейно-упругие материалы, частный постулат изотропии, проверка достоверности определяющих соотношений, задача Ламе.

Введение

Разработка и проверка достоверности определяющих соотношений нелинейно-упругих материалов является актуальной задачей вследствие не единственности её решения [1, 2], в отличие от линейной теории упругости, а также ввиду значительного числа различных эффектов, демонстрируемых нелинейно-упругими телами в процессе их эксплуатации [3, 4].

В работе рассмотрен класс определяющих соотношений нелинейной теории упругости, построенных в рамках частного постулата изотропии Ильюшина. Удельная свободная энергия представляется функцией естественных инвариантов «левого» тензора Генки [6–8]. Первые два естественных инварианта «левого» тензора Генки сохраняют для конечных деформаций наглядный смысл, что позволяет учитывать различные механические эффекты [9, 10]. Это свойство отличает подобные определяющие соотношения от форм связей между напряжениями и деформациями, построенных представлением свободной энергии функцией алгебраических инвариантов тензора деформаций Коши — Грина [11].

В качестве примера рассмотрено пятиконстантное соотношение, приведенное в статье [12]. В данной работе предложена методика проверки достоверности этого соотношения на основе решения задачи Ламе для трубы и сравнения полученных результатов с соответствующими экспериментальными зависимостями.

1. Определяющее соотношение

Определяющие соотношения нелинейной теории упругости строятся из основного термомеханического тождества [13]

$$d\psi + \eta dT \text{-} d'A^{(e)} \equiv 0, \qquad (1)$$

где ψ — удельная свободная энергия, η — удельная энтропия, T — температура, $d'A^{(e)}$ — элементарная работа внешних сил.

Известно [13], что элементарная работа внешних сил определяется несколькими способами с помощью энергетически-сопряженных пар мер напряжений и деформаций. Выберем в качестве составляющей меры деформаций такой пары «левый» тензор деформаций Генки $\underset{\sim}{\Gamma}$ [13], выражаемый из полярного разложения аффинора деформации [14] $\underset{\sim}{\Phi}$

$$\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{R}, \tag{2}$$

$$\underset{\sim}{\Gamma} = \ln \underset{\sim}{U}, \tag{3}$$

где $\underset{\sim}{U}$ — симметричная левая мера искажения, $\underset{\sim}{R}$ — ортогональный тензор поворота.

Тогда элементарная работа внешних сил определяется формулой

$$d'A^{(e)} = \underset{\sim}{\sigma}_R \cdot\cdot d^t \underset{\sim}{\Gamma}. \tag{4}$$

Здесь $\underset{\sim}{\sigma}_R$ — повернутый обобщенный тензор напряжений Коши, связанный с тензором истинных напряжений Коши $\underset{\sim}{S}$ соотношением [13]

$$\underset{\sim}{S} = \sqrt{\frac{g}{G}}\, \underset{\sim}{R}^{-1} \cdot \underset{\sim}{\sigma}_R \cdot \underset{\sim}{R}, \tag{5}$$

где g, G — третьи алгебраические инварианты метрического тензора и меры Коши — Грина $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{\Phi} \cdot \underset{\sim}{\Phi}^T$ соответственно.

Рассмотрим в рамках частного постулата изотропии зависимость свободной энергии от первых двух естественных инвариантов θ_Γ, e_Γ «левого» тензора Генки (3) и температуры T:

$$\psi = \psi\left(\theta_\Gamma, e_\Gamma, T\right), \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} &\theta_\Gamma = \underset{\sim}{\Gamma} \cdot\cdot \underset{\sim}{E}, \\ &e_\Gamma^2 = \left(\underset{\sim}{\Gamma} - \frac{\theta_\Gamma}{3}\underset{\sim}{E}\right) \cdot\cdot \left(\underset{\sim}{\Gamma} - \frac{\theta_\Gamma}{3}\underset{\sim}{E}\right) = \tilde{\Gamma} \cdot\cdot \tilde{\Gamma}. \end{aligned} \tag{7}$$

Свободная энергия в виде (6) позволяет выделить ряд механических эффектов, так как θ, e_Γ описывают изменение объема и формы соответственно.

Используя (4), (6) в законе (1), из [11] следует определяющее соотношение для изотермических процессов

$$\underset{\sim}{\sigma}_R = \tilde{\sigma}_R + \sigma_0 \underset{\sim}{E} = \frac{\tilde{\Gamma}}{e_\Gamma}\frac{\partial \psi}{\partial e_\Gamma} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta_\Gamma}\underset{\sim}{E}. \tag{8}$$

В [12] предложено обобщение закона Гука вида (8), учитывающего дилатационные эффекты:

$$\underset{\sim}{\sigma}_R = \tilde{\sigma}_R + \sigma_0 \underset{\sim}{E} = \left(2G + Ae_\Gamma + 2B\theta_\Gamma\right)\tilde{\Gamma} + \left(K\theta_\Gamma + C\theta_\Gamma^2 + Be_\Gamma^2\right)\underset{\sim}{E}. \tag{9}$$

Здесь константы G, K — модуль сдвига, модуль объемного сжатия соответственно, A, B, C — константы упругости третьего порядка. Возникает вопрос каким образом конкретизировать величины этих констант для исследуемого материала и насколько достоверно описывает данное соотношение поведение материала при произвольном деформировании.

2. Постановка задачи Ламе

Допустим, что материальные константы определены и установлен их физический смысл. Убедимся в достоверности описания поведения материала соотношением (9), рассмотрев задачу Ламе для полого цилиндра в нелинейной постановке — рис. 1. Пусть в цилиндрической системе координат (ось Oz совпадает с соответствующей осью, координаты точек в недеформированном состоянии (ρ, θ, z_0), в деформированном (r, φ, z)) задан цилиндр $R1 \le \rho \le R2$, $-h/2 \le z_0 \le h/2$. На поверхность $\rho = R1$ действует внутреннее давление p, внешняя поверхность свободна от нагрузок. Предполагается плоско-деформированное состояние.

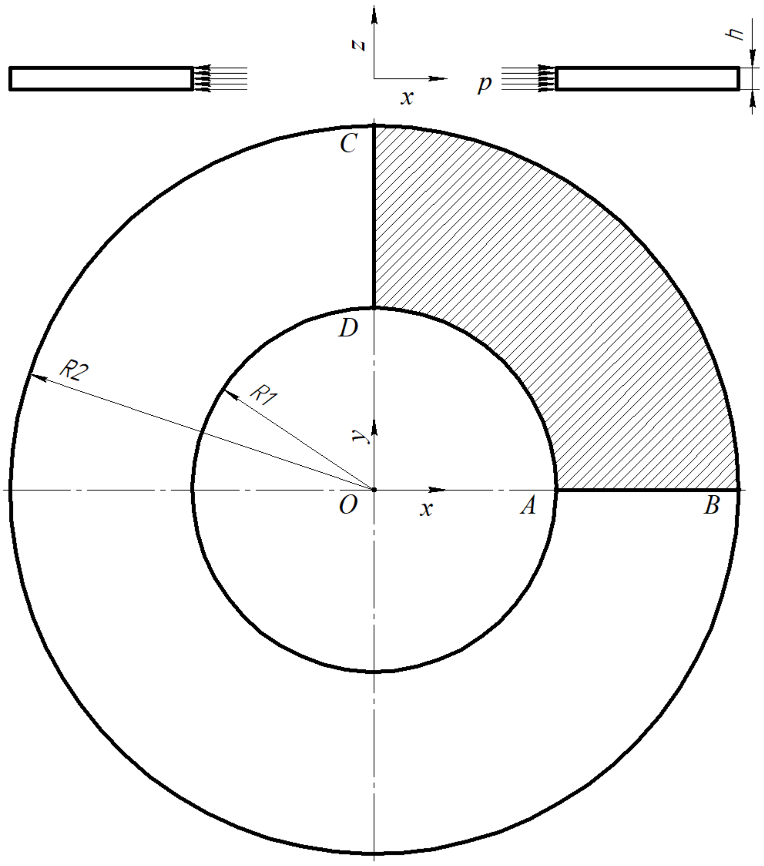


Рис. 1. Схема модели

Запишем связь между координатами в начальном и деформированном состояниях

$$r = r(\rho),\ \varphi = \theta,\ z = z_0. \tag{10}$$

Выражение (10) позволяет представить радиус-вектор положения точки в деформированном состоянии

$$\vec{x} = r(\rho)\vec{e}_\rho + z_0\vec{e}_{z_0}, \tag{11}$$

где $\vec{e}_\rho, \vec{e}_{z_0}$ — соответствующие базисные векторы цилиндрической системы координат.

С учётом определения в цилиндрической системе координат оператора Гамильтона $\mathring{\vec{\nabla}} = \vec{e}_\rho \dfrac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\theta \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_{z_0}\dfrac{\partial}{\partial z_0}$ определим аффинор деформаций используя (11):

$$\underset{\sim}{\Phi} = \mathring{\vec{\nabla}}\,\vec{x} = r'\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho + \frac{r}{\rho}\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\theta}\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\theta} + \vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0} = \lambda_\rho(\rho)\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho + \lambda_\theta(\rho)\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta + \vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0}. \tag{12}$$

Из определения полярного разложения (2) следует, что аффинор деформации (12) совпадает с левой мерой искажения $\underset{\sim}{U}$, в то время как тензор поворота $\underset{\sim}{R}$ является единичным. $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_{z_0}$ образуют ортонормированную тройку векторов, поэтому

$$\underset{\sim}{\Gamma} = \ln\underset{\sim}{U} = \ln\lambda_\rho(\rho)\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho + \ln\lambda_\theta(\rho)\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta. \tag{13}$$

Используя определение (7) и конкретизированный вид (13), найдем

$$\theta_\Gamma(\rho) = \underset{\sim}{\Gamma}\cdot\cdot\underset{\sim}{E} = \ln\lambda_\rho\lambda_\theta, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} &= \ln\sqrt[3]{\frac{\lambda_\rho^2(\rho)}{\lambda_\theta(\rho)}}\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho + \ln\sqrt[3]{\frac{\lambda_\theta^2(\rho)}{\lambda_\rho(\rho)}}\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta - \ln\sqrt[3]{\lambda_\rho(\rho)\lambda_\theta(\rho)}\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0} = \\ &= \tilde{\Gamma}_{\rho\rho}(\rho)\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho + \tilde{\Gamma}_{\theta\theta}(\rho)\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta + \tilde{\Gamma}_{z_0z_0}(\rho)\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0},\end{aligned} \tag{15}$$

$$e_{\Gamma}^{2}(\rho)=\ln^{2}\sqrt[3]{\frac{\lambda_{\rho}^{2}(\rho)}{\lambda_{\theta}(\rho)}}+\ln^{2}\sqrt[3]{\frac{\lambda_{\theta}^{2}(\rho)}{\lambda_{\rho}(\rho)}}+\ln^{2}\sqrt[3]{\lambda_{\rho}(\rho)\lambda_{\theta}(\rho)}. \tag{16}$$

Используя (14)–(16), запишем тензор $\underset{\sim}{\sigma}_R$ (9):

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\sigma}_R &= \left[2G+A_1e_{\Gamma}(\rho)+2B_0\theta_{\Gamma}(\rho)\right]\left(\tilde{\Gamma}_{\rho\rho}(\rho)\vec{e}_{\rho}\vec{e}_{\rho}+\tilde{\Gamma}_{\theta\theta}(\rho)\vec{e}_{\theta}\vec{e}_{\theta}+\tilde{\Gamma}_{z_0z_0}(\rho)\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0}\right)+\\ &+\left[K\theta_{\Gamma}(\rho)+C_1\theta_{\Gamma}^{2}(\rho)+B_0e_{\Gamma}^{2}(\rho)\right]\left(\vec{e}_{\rho}\vec{e}_{\rho}+\vec{e}_{\theta}\vec{e}_{\theta}+\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0}\right)=\\ &=\sigma_{R_{\rho\rho}}(\rho)\vec{e}_{\rho}\vec{e}_{\rho}+\sigma_{R_{\theta\theta}}(\rho)\vec{e}_{\theta}\vec{e}_{\theta}+\sigma_{R_{z_0z_0}}(\rho)\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0}.\end{aligned} \tag{17}$$

Тензор истинных напряжений Коши находим с помощью (5):

$$\underset{\sim}{S}=\frac{1}{\lambda_{\rho}\lambda_{\theta}}\underset{\sim}{\sigma}_R=s_{\rho\rho}\vec{e}_{\rho}\vec{e}_{\rho}+s_{\theta\theta}\vec{e}_{\theta}\vec{e}_{\theta}+s_{z_0z_0}\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0}. \tag{18}$$

Распределение напряжений удовлетворяет уравнениям равновесия [15]

$$\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{S}=\vec{0}. \tag{19}$$

Учитывая следующую из (14)–(18) зависимость компонент тензора истинных напряжений Коши только от радиальной координаты, (19) сводится к единственному уравнению в координатной форме, которое не удовлетворяется тождественно:

$$\frac{1}{r'}\frac{ds_{\rho\rho}}{d\rho}+\frac{s_{\rho\rho}-s_{\theta\theta}}{r}=0. \tag{20}$$

Уравнение (20) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции перемещения $r(\rho)$. Вместе с граничными условиями

$$s_{\rho\rho}\Big|_{\rho=R1}=-p,\; s_{\rho\rho}\Big|_{\rho=R2}=0$$

и уравнениями (17), (18) получаем постановку задачи для определения закона движения (10).

3. Проверка достоверности определяющего соотношения.

Представленная постановка задачи Ламе сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно функции радиальных перемещений. Пусть в рамках некоторой методики найдены значения констант определяющего соотношения (9) для выбранного материала $Material$. Тогда, решив представленную задачу Ламе с материальными константами, соответствующими $Material$, получаем теоретическую оценку напряженно-деформированного состояния в трубе, в том числе зависимость удлинения окружных материальных волокон, достигаемого на внешней поверхности трубы, от приложенного давления p на внутренней поверхности трубы — $\lambda_{\theta}^{theory}\Big|_{\rho=R2}(p)$. Согласно определению (12), данную зависимость можно наблюдать в соответствующем эксперименте — $\lambda_{\theta}^{e}\Big|_{\rho=R2}(p)$. Сформируем функцию относительной погрешности

$$f(p)=\left|\frac{\lambda_{\theta}^{e}\Big|_{\rho=R2}(p)-\lambda_{\theta}^{theory}\Big|_{\rho=R2}(p)}{\lambda_{\theta}^{e}\Big|_{\rho=R2}(p)}\right|,\; p>0.$$

Если значения данной функции не превышают инженерной погрешности, определяющее соотношение корректно описывает поведение материала.

Заключение

Сформулирована постановка задачи Ламе для нелинейно-упругого материала в рамках частного постулата изотропии, учитывающая дилатационные эффекты. Предложена методика проверки достоверности рассматриваемого определяющего соотношения с помощью решения данной задачи и сравнения с экспериментальными данными.

Благодарности

Исследование выполнено в Тульском государственном университете при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Литература

1. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 512 с.

2. *Трелоар Л.* Физика упругости каучука / Л. Трелоар. – Москва : Иноиздат, 1953. – 346 с.

3. *Матченко Н. М.* Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения / Н. М. Матченко, А. А. Трещев. – Тула : Издательство ТулГУ, 2000. – 149 с.

4. *Солодовников В. Н.* Определяющие уравнения изотропного гиперупругого тела / В. Н. Солодовников // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – Т. 41, № 3. – С. 178–183.

5. *Muravlev A. V.* On a representation of an elastic potential in A. A. Il'yushin's generalized strain space / A. V. Muravlev // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 1. – P. 77–79.

6. *Kakavas P. A.* A new development of the strain energy function for hyperelastic materials using a logarithmic strain approach / P. A. Kakavas // Journal of Applied Polymer Science. – 2000. – Vol. 77, № 3. – P. 660 – 672.

7. *Montella G.* The exponentiated Hencky strain energy in modelling tire derived material for moderately large deformations / G. Montella, S. Govindjee, P. Neff // Journal of Engineering Materials and Technology, Transaction of the ASME. – 2015.

8. *Latorre M.* On the interpretation of the logarithmic strain tensor in an arbitrary system of representation / M. Latorre, F. J. Montans // International Journal of Solids and Structures. – 2014. – Vol. 51. – P. 1507–1515.

9. *Толоконников Л. А.* Вариант соотношений разномодульной теории упругости / Л. А. Толоконников // Прочность и пластичность. – Москва: Наука. – 1971. – С. 102–104.

10. *Маркин А. А.* Нелинейные соотношения анизотропной упругости и частный постулат изотропии / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова // Прикладная математика и ме-ханика. – 2007. – Т. 71, Вып. 4. – С. 587–594.

11. *Козлов В. В.* Анализ определяющих соотношений изотропных нелинейно-упругих сжимаемых материалов / В. В. Козлов, А. А. Маркин // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2014. – Вып. 1, Ч.1. – С. 133–143.

12. *Толоконников Л. А.* Определяющие соотношения при конечных деформациях / Л. А. Толоконников, А. А. Маркин // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Межвузов. сб. трудов. – Калинин: Калинин. политех. ин-т: Издательство КГУ. – 1986. – С. 49–57.

13. *Маркин А. А.* Нелинейная теория упругости: учеб. пособие / А. А. Маркин, Д. В. Христич. – 2-е изд., доп. – Тула : Издательство ТулГУ, 2007. – 92 с.

14. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. В 2 т. Т. 2 / Л. И. Седов. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1970. – 568 с.

15. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды: Учебник / А. А. Ильюшин. – 3-е изд. – Москва : Издательство МГУ, 1990. – 310 с.

УДК 620.179.162

АНИЗОТРОПИЯ СКОРОСТЕЙ УПРУГИХ ВОЛН ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ АЛЮМИНИЯ

Д. Б. Куатхина, Д. А. Третьяков

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Аннотация. Работа посвящена экспериментальному исследованию зависимости скоростей объемных продольных и поперечных волн от деформаций при одноосном упруго-пластическом деформировании корсетных образцов из алюминиевого проката. Установлено, что изменение скоростей упругих волн разного типа демонстрирует похожее поведение с наступлением различных стадий пластической деформации – упрочнением, образованием шейки и разрушением. Для большинства этапов нагружения по результатам ультразвуковой диагностики удается однозначным образом установить текущую величину деформаций материала. Это позволяет использовать результаты экспериментов в акустической тензометрии металлов.
Ключевые слова: ультразвуковой контроль, продольные и поперечные волны, пластическая деформация, разрушение, эхо-импульсный метод.

Введение

Данные о распространении упругих волн в твердом теле позволяют охарактеризовать его текущее состояние и предсказать механическое поведение в процессе нагружения и деформации. Информация о величине скоростей волн Рэлея и Лэмба используется при акустической тензометрии [1] и исследовании текстуры металлического проката [2]. Измерения разности скоростей поперечных волн взаимно ортогональной поляризации лежит в основе метода акустоупругости [3] и его модификаций — акустопластичности [4] и акустоповрежденности [5]. Они используются для количественной оценки мер поврежденности материала как в скалярных [6, 7], так и в тензорных моделях механики [8, 9]. Комбинированное использование головных волн позволяет увеличить точность результатов неразрушающего контроля при наличии температурных напряжений и деформаций [10].

В линейной теории упругости скорости акустических волн в среде являются постоянными, поскольку описываются через константы упругости материала. Это предположение не позволяет описать ряд экспериментальных явлений, к числу которых относится акустоупругий эффект [11]. Он заключается в существовании связи между напряженно-деформированным состоянием и скоростями распространения волн в твердом теле [12]. Разработанные в 1950–1980-х гг. модели, описывающие акустоупругий эффект (модели акустоупругости), основаны на использовании соотношений нелинейно-упругого материала Мурнагана [13], с помощью которых удалось получить зависимости скоростей волн от деформаций как эффект второго порядка [14]. Они дают на порядок меньшие расчетные значения величины акустоупругого эффекта по сравнению с наблюдаемыми в опытах [15]. Кроме того, данные модели ограничиваются случаем упругих [16] или малых упруго-пластических деформаций среды [17], что ограничивает область применения акустоупругости и акустической тензометрии.

В целом ряде работ отмечается, что скорости волн с ростом деформаций демонстрируют более сложное нелинейное поведение, нежели считалось ранее [18, 19]. В частности, наблюдается связь между скоростями волн Релея и стадиями пластического деформирования [20]. Данная работа посвящена исследованию характера изменения скоростей объемных продольных и поперечных волн при больших упруго-пластических деформациях алюминиевых образцов под нагрузкой.

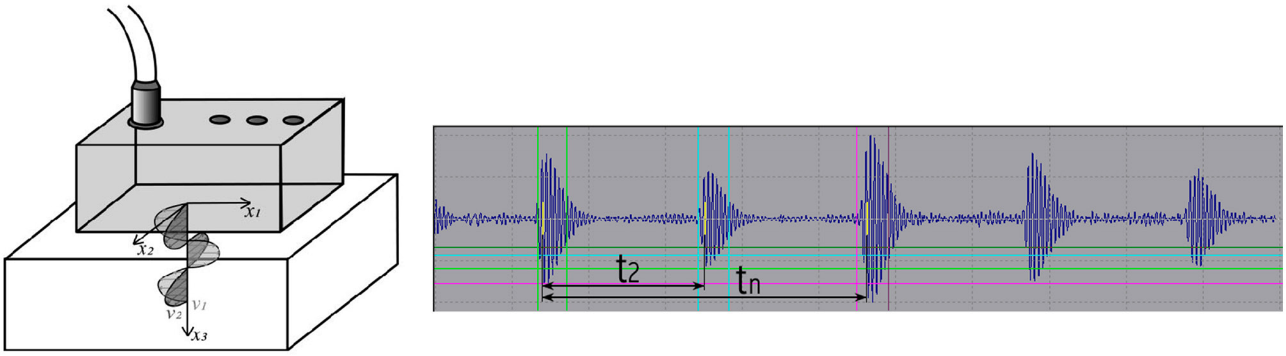
1. Экспериментальные методы и подходы

1.1. Измерение ультразвуковых волн в образце под нагрузкой

В качестве образца была выбрана заготовка из малолегированного алюминиевого сплава АМц, вырезанная поперёк направления проката. Образец имел форму двусторонней лопатки и обладал общей длиной 500 мм, длиной рабочей зоны 270 мм, шириной рабочей зоны 70 мм и толщиной 16 мм.

Образец был испытан на одноосное монотонное растяжение в гидравлической разрывной машине INSTRON-8806. Всего было проведено 20 этапов нагружения. Предел текучести образца составил $\sigma_T = 75$ МПа, полная осевая деформация вплоть до разрушения составила $\varepsilon = 27{,}8\,\%$.

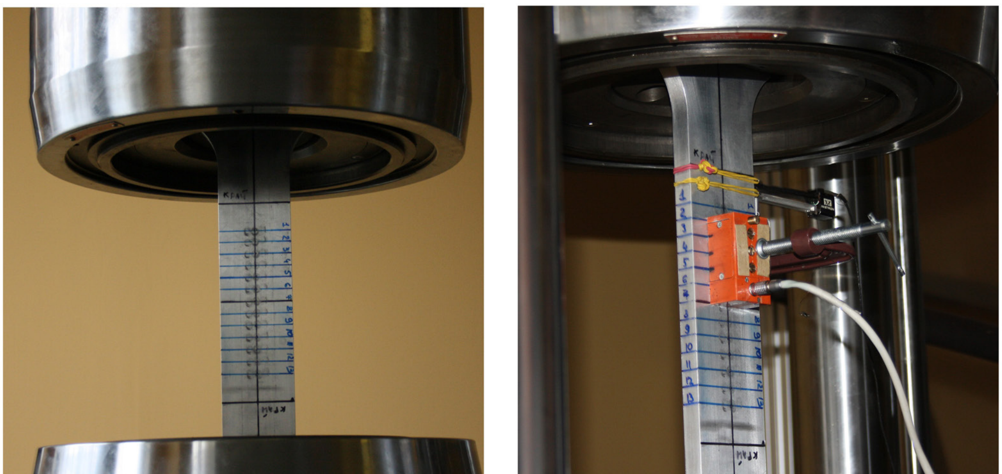
Для акустических измерений использовался трехканальный ультразвуковой прибор ИН-5101А. Прибор реализует эхо-импульсный метод неразрушающего контроля путем генерации плоских поперечных волн V_1, V_2 взаимно ортогональной поляризации и продольной волны V_3. Схема ориентации плоскостей распространения волн показана на рис. 1а.



а *б*

Рис. 1. Акустические измерения: (а) ориентация поперечных (V_1, V_2) и продольных (V_3) волн при одноосном растяжении; (б) определение временных задержек t_2 и t_n между импульсами

На каждом этапе в 10 точках, выбранных в рабочей части образца, фиксировались значения временных задержек t_2 (между 1-м и 2-м отраженными импульсами) и t_n между n отра-



а *б*

Рис. 2. Механические испытания: (а) одноосное растяжение образца; (б) ультразвуковые измерения в образце под нагрузкой жёнными волновыми пакетами. Согласно техническому описанию прибора, выбирался $n = 3$ волновой пакет. Пример выбора временных задержек между многократно отраженными импульсами представлен на рис.1б. Точки располагались на центральной продольной оси образца на расстоянии 13 мм друг от друга. Измерения проводились под нагрузкой при остановках испытательной машины (рис. 2б) и фиксированных значениях полных осевых деформаций. С помощью микрометра МК 0-25 мм с точностью 0,01мм были получены значения толщины образца в направлении распространения волн для дальнейшего определения фазовых скоростей. В ходе опытов реализовывалось жесткое ступенчатое нагружение образца (рис. 2а).

1.3. Обработка данных ультразвуковых измерений

На каждом этапе нагружения была выполнена проверка (1) на предмет корректного определения границ временных задержек между импульсами по синфазным точкам:

$$\Delta t_{ij} = \left| t_{n\,ij} - t^*_{ij} \right| < 0{,}1...0{,}4, \tag{1}$$

где время $t^*_{ij} = 2 \cdot t_{2\,ij}$, i — номер этапа, j — номер точки.

Далее было вычислено усреднённое значение временной задержки $\overline{t_{ij}}$ (*мкс*) для каждой точки на каждом этапе (2):

$$\overline{t_{ij}} = \frac{t_{n\,ij}}{2}. \tag{2}$$

Затем через скорости распространения волн была вычислена толщина образца $h_{\text{выч}\,ij}$ (*мм*) для каждого этапа нагружения (3):

$$h_{\text{выч}\,ij} = V_{ki} \cdot \frac{\overline{t_{ij}}}{2} \cdot 10^9, \tag{3}$$

где V_{ki} — фазовая скорость волны (м/с), $k = 1, 2, 3$ — обозначение (номер) волны.

Скорости V_{ki} были приняты постоянными в рамках одного этапа. Значения скоростей V_{ki} были подобраны таким образом, чтобы вычисленная толщина $h_{\text{выч}\,ij}$ (*мм*) имела минимально возможное отклонение Δh от измеренного значения фактической толщины $h_{\text{факт}\,ij}$ (*мм*). Для этого было использовано условие (4):

$$\Delta h = \left| h_{\text{факт}\,ij} - h_{\text{выч}\,ij} \right| \le 0{,}02. \tag{4}$$

2. Результаты и обсуждение

2.1. Нелинейное поведение скоростей волн с ростом деформаций

Были получены нелинейные зависимости скоростей волн $V_k(\varepsilon)$ от истинных (логарифмических) деформаций ε. Графики для скоростей ортогонально поляризованных поперечных волн $V_1(\varepsilon)$, $V_2(\varepsilon)$ представлены на рис. 3, для скорости продольной волны $V_3(\varepsilon)$ — на рис. 4.

Зависимости на рис. 3 и 4 имеют одинаковые характерные участки и критические точки. Значения скоростей волн V_k были найдены по формулам (1)–(4) на основании данных с трех каналов датчика, каждый из которых работает независимо от другого. Это говорит о едином для поперечных и продольных объемных волн характере изменений скоростей V_k, $k = 1, 2, 3$ с ростом величины упруго-пластических деформаций ε алюминиевого образца.

На рис. 3 и рис. 4 необходимо отметить несколько точек, в которых наблюдаются локальные «всплески» значений скоростей, в частности, при значениях истинной деформации $\varepsilon = 2{,}1\,\%$ и $\varepsilon = 4{,}9\,\%$. Перед восьмым этапом измерений ($\varepsilon = 4{,}9\,\%$) произошла разгрузка образца (испытания проводились в течение двух дней). Это привело к упрочнению и отразилось на графиках скоростей при нагружении образца на следующий день до величины деформаций

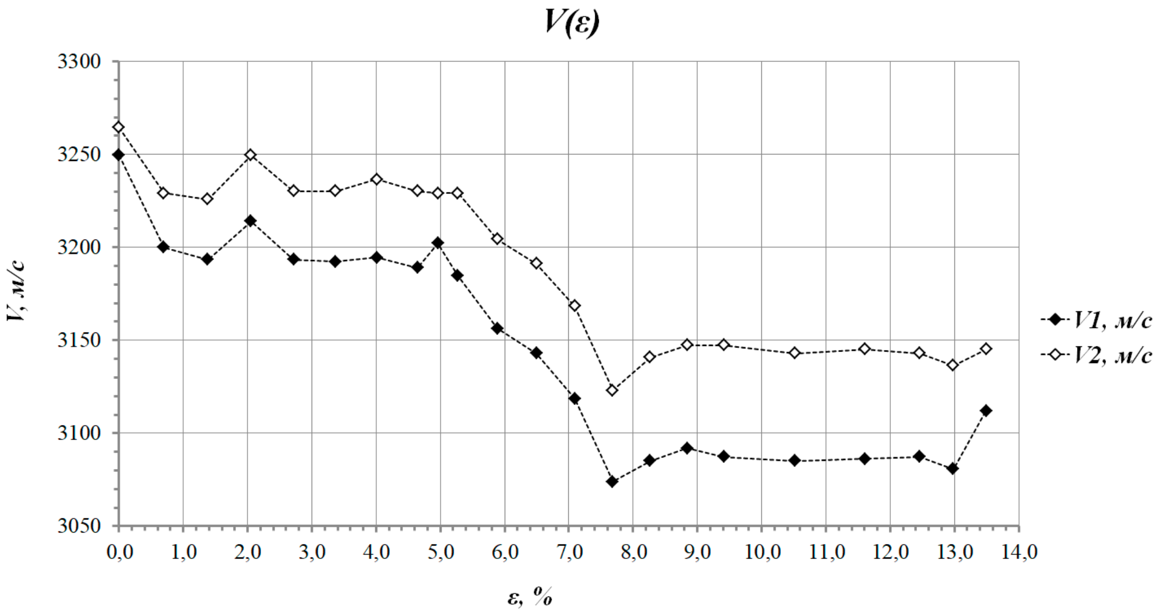


Рис. 3. Зависимость скоростей поперечных волн $V_1(\varepsilon)$, $V_2(\varepsilon)$ от истинных деформаций ε

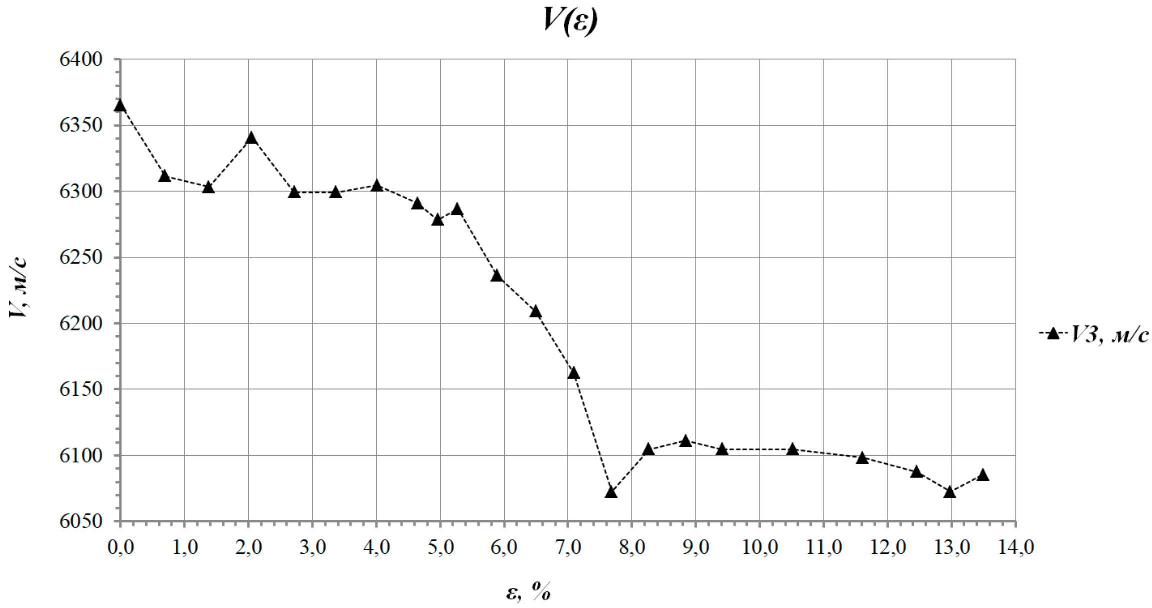


Рис. 4. Зависимость скорости продольной волны $V_3(\varepsilon)$ от истинных деформаций ε

как до разгрузки. Наиболее чувствительной к разгрузке оказалась скорость поперечной волны $V_1(\varepsilon)$, плоскость распространения которой ориентирована по направлению нагружения.

Наблюдаемый на всех графиках на рис. 3 и рис. 4 локальный максимум скоростей при величине истинных деформаций $\varepsilon = 2{,}1\,\%$ нельзя объяснить никаким изменением приложенной внешней растягивающей силы. Можно предположить, что он связан с изменением механических свойств материала на макроуровне в процессе пластической деформации.

2.2. Связь между скоростями продольных и поперечных волн и стадиями пластической деформации

На графиках на рис. 5 можно выделить три общих этапа, наступление которых коррелирует с очередными стадиями пластического деформирования. При значениях логарифмической деформации $\varepsilon = 0{,}6\,\%...4{,}5\,\%$ наблюдается плато значений, которое соответствует стадии пластического упрочнения образца. Резкий спад при $\varepsilon = 4{,}5\,\%...7{,}6\,\%$ свидетельствует об уменьшении поперечного сечения образца на стадии образовании шейки, которая начинается после превышения предела прочности. Во время образования шейки материал больше не может выдерживать максимальное напряжение, деформация образца увеличивается. Начиная со значения $\varepsilon \geq 7{,}6\,\%$ наблюдается очередное плато, которое соответствует стадии разрушения. Образец при этом вытягивается, наблюдается искривление его поверхности вблизи места будущего разрыва. Выделенные этапы представлены на рис. 5.

Характер полученных зависимостей напоминает кривую Штрибека, которая может быть применима в случае упрочнения материалов при растяжении [21]. Он также подтверждается результатами, полученными для волн Рэлея при деформации стальных образцов [20].

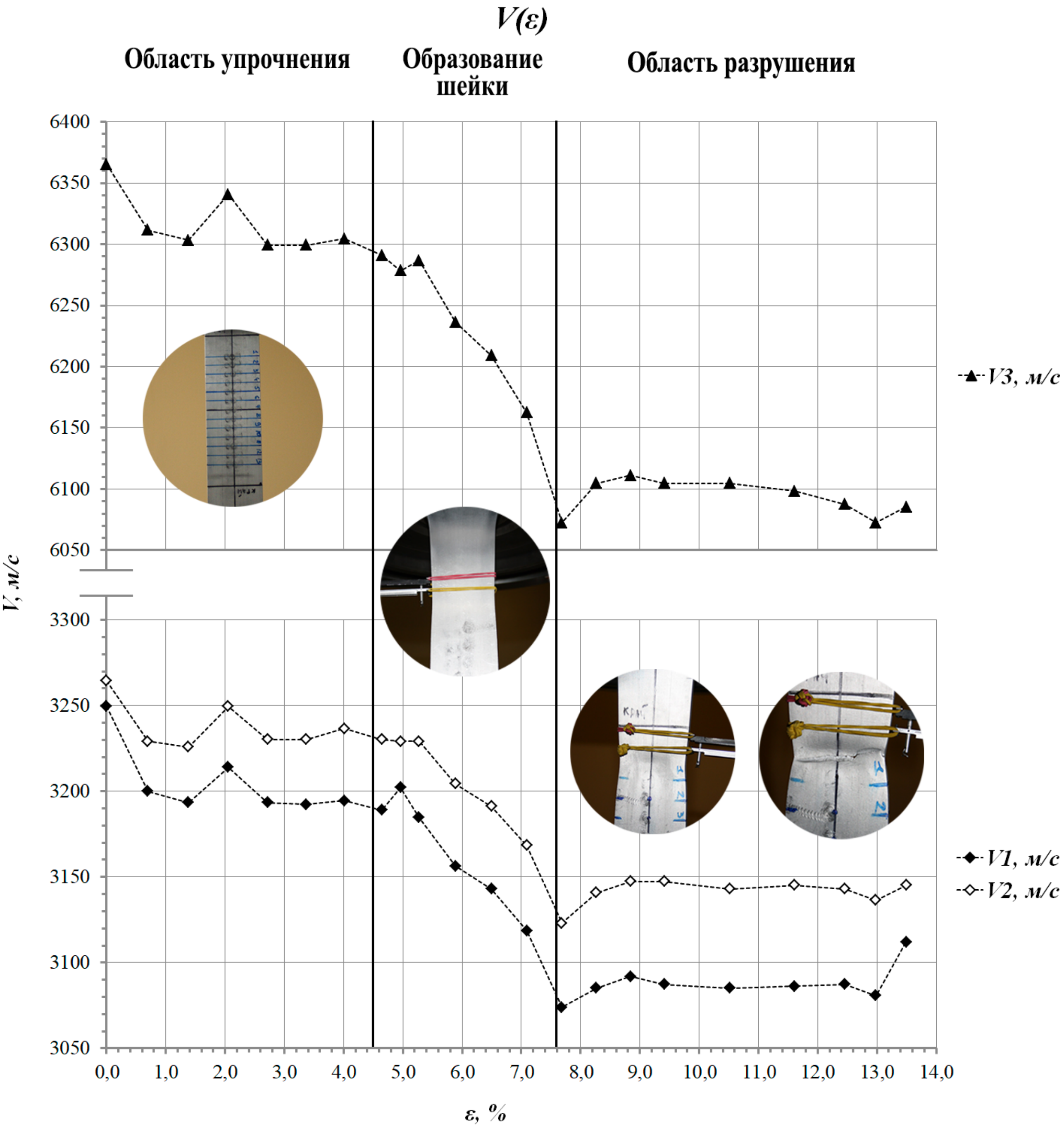


Рис. 5. Характерные этапы зависимости скоростей волн от деформаций

Заключение

В работе была исследована зависимость скоростей объемных продольных и поперечных волн от деформаций при одноосном упруго-пластическом деформировании корсетных образцов из алюминиевого проката. Было установлено, что с ростом деформаций упругие продольные и ортогонально поляризованные волны меняются одинаковым образом. Тренд изменения скоростей напоминает этапы, характерные для кривой Штрибека, которая может быть применима и для описания процесса упрочнения металлов [21]. Эти этапы связаны со стадиями пластической деформации — упрочнением, образованием шейки и разрушением. Качественно близкие результаты наблюдаются для волн Рэлея при деформации стальных образцов [20]. Для большинства этапов нагружения удается однозначным образом установить текущую величину деформаций материала по результатам ультразвуковых измерений. Это может быть использовано при акустической тензометрии деталей машин и элементов конструкций из металлического проката.

Благодарности

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ за счет средств стипендии № СП–5336.2022.1 Президента Российской Федерации.

Литература

1. *Муравьев В. В., Стрижак В. А., Пряхин А. В.* Исследование внутренних напряжений в металлоконструкциях методом акустоупругости // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2016. – Т. 82, №. 12. – С. 52–57.

2. *Volkova L. V., Murav'eva O. V., Murav'ev V. V.* Nonuniformity of acoustic anisotropy of thick-sheet steel // Steel in Translation. – 2021. – Vol. 51. – P. 335–341.

3. *Nikitina N. Y., Kamyshev A. V., Kazachek S. V.* The application of the acoustoelasticity method for the determination of stresses in anisotropic pipe steels // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2015. – Vol. 51. – P. 171–178.

4. *Kobayashi M.* Acoustoelastic theory for finite plastic deformation of solids // JSME International Journal. Ser. 1, Solid Mechanics, Strength of Materials. – 1992. – Vol. 35, No 1. – P. 45–52.

5. *Belyaev A. K., Polyanskiy V. A., Tretyakov D. A.* Estimating of mechanical stresses, plastic deformations and damage by means of acoustic anisotropy // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2020. – No 4. – P. 130–151.

6. *Мишакин В. В., Клюшников В. А., Кассина Н. В.* Исследование процесса разрушения сталей акустическим методом и методом делительных сеток // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2009. – № 5. – С. 33–39.

7. *Ерофеев В. И., Никитина Е. А.* Локализация волны деформации, распространяющейся в поврежденном материале // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 6. – С. 60–62.

8. *Belyaev A. K. [et al.]* Investigation of the correlation between acoustic anisotropy, damage and measures of the stress-strain state // Procedia Structural Integrity. – 2017. – Vol. 6. – P. 201–207.

9. *Семенов А. С., Полянский В. А., Штукин Л. В., Третьяков Д. А.* Влияние поврежденности поверхностного слоя на акустическую анизотропию // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Vol. 59. – No 6. – P. 201–210.

10. *Гончар А. В., Мишакин В. В., Соловьев А. А., Клюшников В. А.* Применение головных и объемных волн для оценки поврежденности стали Ст3сп5 при усталостном разрушении // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2024. – № 5(770). – С. 48–56.

11. *Benson R. W., Raelson V. J.* Acoustoelasticity // Prod. Eng. – 1959. – Vol. 30, No 29. – P. 56–59.

12. *Hughes D. S., Kelly J. L.* Second-order elastic deformation of solids //Physical Review. – 1953. – Vol. 92, No 5. – P. 1145–1149.

13. *Murnaghan F. D.* Finite deformations of an elastic solid // American Journal of Mathematics. – 1937. – Vol. 59, No 2. – P. 235–260.

14. *Smith R. T.* Stress-induced anisotropy in solids—the acousto-elastic effect // Ultrasonics. – 1963. – Vol. 1, No 3. – P. 135–147.

15. *Belyaev A. K. [et al.]* Propagation of sound waves in stressed elasto-plastic material // 2016 Days on Diffraction (DD). – IEEE, 2016. – P. 56–61.

16. *Fukuoka H., Toda H., Naka H.* Nondestructive residual-stress measurement in a wide-flanged rolled beam by acoustoelasticity // Experimental Mechanics. – 1983. – Vol. 23. – P. 120–128.

17. *Hirao M., Pao Y. H.* Dependence of acoustoelastic birefringence on plastic strains in a beam // The Journal of the Acoustical society of America. – 1985. – Vol. 77, No 5. – P. 1659–1664.

18. *Ivanova Y., Partalin T., Pashkuleva D.* Acoustic investigations of the steel samples deformation during the tensile // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2017. – Vol. 53. – P. 39–50.

19. *Semukhin B. S., Zuev L. B., Bushmeleva K. I.* The velocity of ultrasound in low-carbon steel deformed at the low yield limit // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2000. – Vol. 41, No 3. – P. 556–559.

20. *Баранникова С. А., Лунёв А. Г., Малиновский А. П., Зуев Л. Б.* Изменение скорости ультразвука при водородном охрупчивании высокохромистой стали // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2018. – Т. 20, № 1. – С. 187–196.

21. *Stribeck R.* Die wesentlichen eigenschaften der gleit-und rollenlager // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. – 1902. – Vol. 46. – P. 1341–1348.

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В РАЗНОМОДУЛЬНОМ УПРУГОМ СЛОЕ

А. А. Лаптева, О. В. Дудко

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. В работе изучаются особенности распространения волн деформаций в разномодульной упругой среде при наличии внешних сил. Разномодульная среда полагается связной, не допускающей разрывов сплошности. Рассматривается нестационарная краевая задача о взаимодействии плоской волны сжатия со свободной границей разномодульного упругого слоя, находящегося в поле силы тяжести. Показано, что наличие силы тяжести расширяет класс функций перемещения на нагружаемой границе слоя, при которых волна сжатия после отражения от свободной границы сохраняет свой тип.
Ключевые слова: разномодульность, упругий слой, сила тяжести, одноосное ударное нагружение, волна сжатия, отражение от свободной границы.

Введение

Известно, что механические свойства многих материалов, таких как горные породы, дерево, некоторые металлические сплавы, зернистые и волокнистые композиты и др. зависят от типа напряженно-деформированного состояния [1, 2]. Сильная физическая нелинейность таких разномодульных сред существенно влияет на процессы их динамического деформирования, а наличие внешних сил (например, силы тяжести) способно добавлять свои особенности в возникновение и движение волн деформаций. В настоящей работе рассматриваются постановочные аспекты и один из частных случаев решения начально-краевой задачи об отражении волны сжатия от свободной границы разномодульного упругого слоя, где предварительное статическое поле деформаций создается силой тяжести. Акцент делается на определении формы закона движения нагружаемой границы, при котором возникшая волна сжатия сохраняет свой тип, отражаясь от свободной границы.

1. Модельные соотношения

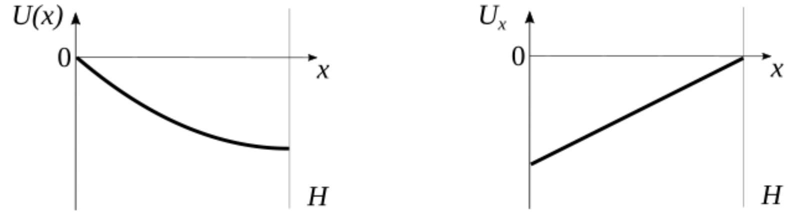
Для математической модели разномодульного упругого материала в работе выбран трехконстантный упругий потенциал неаналитической формы [2]. При одноосном деформировании разномодульной упругой среды [2] уравнение движения имеет вид $\ddot{u} = (c(e))^2 u_{xx} + F$, где слагаемое F отлично от нуля, когда среда находится в поле силы тяжести. Характеристическая скорость $c(e)$ является кусочно-постоянной функцией деформаций: $c(e) = a$ в области, где происходит сжатие среды $(e < 0)$, $c(e) = b < a$ при растяжении $(e > 0)$. Значения a и b $(0 < b < a)$ вычисляются через упругие модули среды [2]. Решение уравнения движения можно представить в виде $u(x,t) = f_1(t - x / c(e)) + f_2(t + x / c(e)) + \tilde{u}(x,t)$, где неизвестные функции $f_1(\xi(x,t))$, $f_2(\eta(x,t))$ и частное решение неоднородного уравнения $\tilde{u}(x,t)$ определяются из краевых условий задачи.

Согласно [3], обобщенное решение уравнения движения разномодульной упругой среды представляет собой кусочно-гладкую функцию $u(x,t)$ и может содержать несколько типов сильных разрывов (скачков первых производных перемещений на волнах деформаций). На фронтах сильных разрывов должны выполняться условия Гюгонио [3], связывающие состояния среды по обе стороны от каждого фронта. По аналогии с [3], для связной разномодульной среды [2] можно выделить следующие типы сильных разрывов: полусигнотон (ненулевой скачок деформаций от свободного состояния или к нему), простой разрыв (скачок деформаций без изменения типа деформированного состояния) и ударная волна (скачок от растяжения к сжатию). Полусигнотоны и простые разрывы могут быть как быстрыми волнами сжатия со скоростью a, так и медленными волнами растяжения со скоростью b. Ударная волна несет сжатие в растянутую область среды и скачком меняет значение характеристической скорости $c(e)$ с b на a. Скачок от сжатия к растяжению с внезапным изменением характеристической скорости от a к b невозможен, поскольку в этом случае на фронте нарушаются условия неубывания энтропии и эволюционности сильного разрыва [4].

Ранее в [5] для модели [2] исследовались особенности распространения граничных возмущений и их отражение от свободной границы в разномодульном упругом слое без присутствия массовых сил. В настоящей работе в рамках модели [2] рассматривается возникновение волны сжатия в результате ударного воздействия на границу слоя, находящегося в поле силы тяжести, ее дальнейшее распространение в среде и отражение от свободной границы.

2. Постановка и частный случай решения начально-краевой задачи

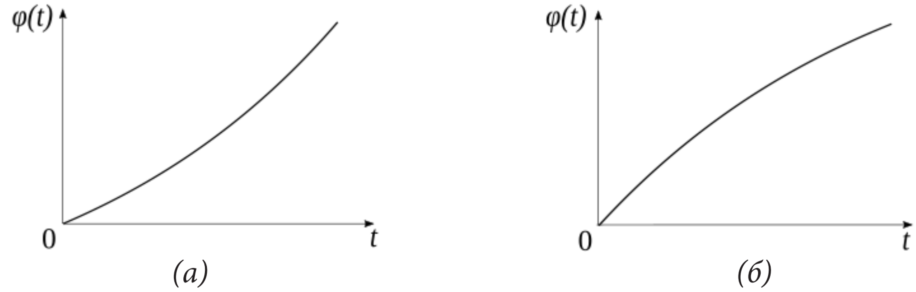
Рассмотрим разномодульный упругий слой толщиной H, который находится под действием силы тяжести. Будем считать, что ось x направлена противоположно действию силы тяжести: $F = -g$. В этом случае статическое поле перемещений, созданное силой тяжести, имеет вид $U(x) = g(x^2 - 2Hx)/(2a^2)$ (рис. 1, а). Соответственно, до начала ударного воздействия слой находится в статическом сжатом состоянии $U_x = -g(H - x)/a^2$ (рис 1, б).



(а) (б)

Рис. 1. Статические поля перемещений (а) и деформаций (б) в слое

Пусть с момента времени $t = 0$ упругий слой подвергается одноосному сжатию таким образом, что движение точек нагружаемой границы $x = 0$ при $t \geq 0$ задано положительной монотонно возрастающей функцией граничного перемещения $u(0,t) = \varphi(t)$ (рис. 2). Ударный характер сжимающего граничного воздействия на $x = 0$ задается условием $\varphi'(t) \neq 0$ при любом $t \geq 0$. Граница слоя $x = H$ остается свободной от напряжений на протяжении всего процесса деформирования $(\sigma(H,t) = 0)$. Такое воздействие приводит к возникновению быстрой волны сжатия $x = at$, бегущей от границы $x = 0$. При наличии статического поля сжатия $U_x < 0$ возникшая волна является первичным простым разрывом, который несет со скоростью a динамические (дополнительные к статике) деформации сжатия в сторону свободной границы $x = H$ (рис. 3, а). На рис. 3 красные линии соответствуют решению, построенному с



(а) (б)

Рис. 2. Варианты функции граничных перемещений $u(0,t) = \varphi(t)$: вогнутая (а), выпуклая (б) учетом силы тяжести, синие линии — перемещения и деформации без учета массовых сил [5], серым цветом показано статическое состояние, созданное силой тяжести.

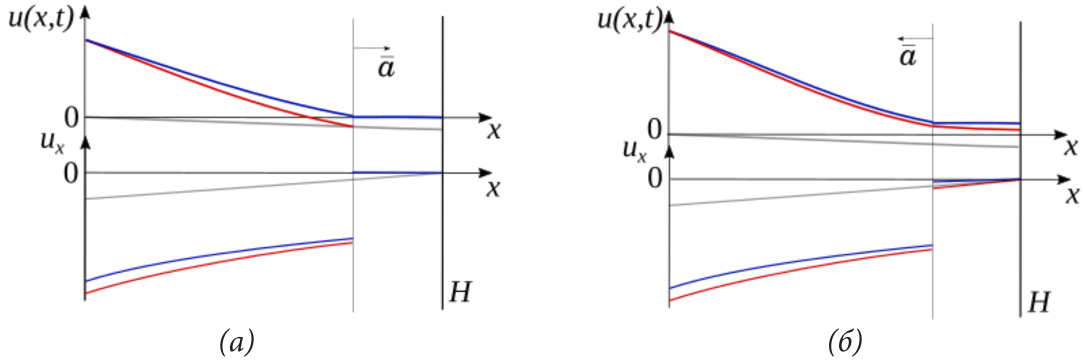


Рис. 3. Решение задачи при $t < H / a$ (а) и частный случай решения при $t > H / a$ (б)

Решение задачи при $t < H / a$ до момента взаимодействия волны сжатия со свободной границей слоя имеет вид (рис. 3, а):

$$u(x,t)|_{t<H/a} = \begin{cases} U(x) = g(x^2 - 2Hx)/(2a^2), & x \geq at, \\ \varphi\big(t - x/a\big) + U(x), & 0 \leq x \leq at. \end{cases}$$

В момент времени $t_1 = H / a$ первичный простой разрыв достигает свободной границы слоя $x = H$. Рассмотрим частный случай, когда обратно в слой отражается единственный фронт — волна сжатия (быстрый простой разрыв) с характеристической скоростью a (рис. 3, б). Тогда решение задачи при $t \geq t_1$ имеет вид

$$u(x,t)|_{t\geq H/a} = \begin{cases} \varphi\big(t - 2t_1 + x/a\big) + \varphi\big(t - x/a\big) + U(x), & 2H - at \leq x \leq H, \\ \varphi\big(t - x/a\big) + U(x)\ , & 0 \leq x \leq 2H - at, \end{cases}$$

совпадающий с решением для линейноупругой среды. Такая отраженная волновая картина возникает не при любой положительной монотонно возрастающей функции граничного перемещения $\varphi(t)$. Деформации за отраженным фронтом вычисляются как $u_x(x,t) = -2(H - x)(\varphi''(t) + g/2)/a^2$. Очевидно, что $u_x < 0$ только при выполнении условия $\varphi''(t) > -g/2$. Следовательно, решение с одним отраженным фронтом сжатия возможно только при определенных ограничениях на форму монотонно возрастающей функции $\varphi(t)$: она должна быть либо вогнутой при $\varphi''(t) \geq 0$ (рис. 2, а), либо выпуклой, но удовлетворяющей условию $-g/2 < \varphi''(t) < 0$ (рис. 2, б). Таким образом, при наличии силы тяжести дополнительная сжимающая нагрузка на границе слоя приводит к возникновению быстрого простого разрыва, его распространению по предварительно сжатой среде и отражению от свободной границы слоя в виде быстрого сжимающего простого разрыва только в ограниченном классе функций $\varphi(t)$. Тем не менее, этот класс оказывается шире по сравнению с решениями аналогичной задачи [5] для связной разномодульной среды [2] в отсутствие массовых сил. Если $\varphi''(t) < -g/2$, то волновая картина, отраженная от свободной границы разномодульного слоя среды [2], будет иметь более сложный вид, требующий дополнительных исследований. Согласно свойствам среды [2], по аналогии с [5] можно утверждать, что в этом случае в пакете отраженных волн должен появиться быстрый фронт, замыкающий зону предварительного сжатия, и медленный фронт, между которым и границей $x = H$ растет зона растяжения. При этом решение для связной разномодульно-упругой среды [2] будет существенно отличаться от решений [4] для упругосыпучей среды, поскольку в модели [2] возможны медленные волны растяжения с ненулевой скоростью распространения.

Заключение

На основе проведенного анализа делаем вывод, что наличие силы тяжести расширяет класс функций граничного перемещения, при которых решение начально-краевой задачи об отражении волны сжатия от свободной границы разномодульного упругого слоя содержит один отраженный фронт сжатия. По этой же причине происходит сужение класса выпуклых монотонно возрастающих функций граничного перемещения, при которых в волновой картине, отраженной от свободной границы слоя, возникают не только волны сжатия, но и волны растяжения. Кроме того, на форму решения после отражения помимо силы тяжести оказывает влияние связность разномодульной среды.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ИАПУ ДВО РАН (тема № FWFW-2021-0005).

Литература

1. *Ломакин Е. В.* Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами / Е. В. Ломакин // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10, № 5. – С. 41–52.

2. *Ляховский В. А.* О поведении упругой среды с микронарушениями / В. А. Ляховский, В. П. Мясников // Изв. АН ССР. Физика Земли. – 1984. – № 10. – С. 71–75.

3. *Маслов В. П.* Общая теория уравнений движения разномодульной среды / В. П. Маслов, П. П. Мосолов // Прикладная математика и механика. – 1985. – Т. 49, вып. 3. – С. 419–437.

4. *Куликовский А. Г.* Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – Москва : Московский лицей, 1998. – 412 с.

5. *Дудко О. В.* О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / О. В. Дудко, А. А. Лаптева, К. Т. Семенов // Дальневосточный математический журнал. – 2005. – Т. 6, № 1–2. – С. 94–105.

УДК 539.3

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

Ю. В. Малыгина, А. В. Ковалев

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе представлены соотношения для напряжений, перемещений и радиуса упругопластической границы в общем виде, полученные в ходе решения задачи о термодеформировании трубы из упрочняющегося материала, находящейся под действием внутреннего давления. Также проведено компьютерное моделирование решения данной задачи методом конечных элементов. Выполнен сравнительный анализ полученных решений.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температура, сжимаемость, упрочнение, напряжения, деформации, перемещения, радиус упругопластической трубы, компьютерное моделирование.

Введение

В процессе поиска решений задач механики сплошных сред возникает вопрос в выборе метода: численного или аналитического. Цель данной статьи заключается в сравнении решений, полученных аналитическим методом и методом компьютерного моделирования, которое может помочь исследователям и инженерам выбрать наиболее эффективный путь для решения конкретной задачи.

В представленной работе рассмотрим решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния упрочняющейся упругопластической трубы, находящейся под действием стационарного поля температуры и внутреннего давления. Проведем сравнение численного и аналитического решений.

1. Аналитическое решение

Рассмотрим толстостенную трубу внутреннего радиуса a и внешнего — b. Пусть труба находится под действием внутреннего давления p и стационарного поля температуры. Материал трубы будем считать упруго сжимаемым. Постоянные материала предполагаются не зависящими от температуры. Осевую деформацию будем считать постоянной.

Запишем полную систему уравнений для рассматриваемой задачи:

– уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \tag{1}$$

где σ_r, σ_θ — компоненты тензора напряжений;

– соотношения Коши

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, e_\theta = \frac{u}{r}, \tag{2}$$

где e_r, e_θ — компоненты тензора деформаций; u — радиальное перемещение.

– условие пластичности

$$\left(\sigma_\theta - \sigma_r - c\left(e_\theta^p - e_r^p\right)\right)^2 + \left(\sigma_\theta - \sigma_z - c\left(e_\theta^p - e_z^p\right)\right)^2 + \left(\sigma_r - \sigma_z - c\left(e_r^p - e_z^p\right)\right)^2 = 6k^2, \tag{3}$$

где σ_z — компонента тензора напряжений, c — коэффициент упрочнения, k — предел текучести.

Предположим, что упругие деформации связаны с напряжениями законом Дюамеля-Неймана, а приращение пластических деформаций — ассоциированным законом пластического течения. Поскольку полные деформации упругопластического тела состоят из суммы упругих и пластических, то справедливо следующее соотношение [1, 2]

$$
\begin{aligned}
de_r &= \frac{1}{E}\left(d\sigma_r - \mu\left(d\sigma_\theta + d\sigma_z\right)\right) + d\left(\alpha T\right) + \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z - c\left(2e_r^p - e_\theta^p - e_z^p\right)\right),\\
de_\theta &= \frac{1}{E}\left(d\sigma_\theta - \mu\left(d\sigma_r + d\sigma_z\right)\right) + d\left(\alpha T\right) + \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z - c\left(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p\right)\right),\\
de_z &= \frac{1}{E}\left(d\sigma_z - \mu\left(d\sigma_r + d\sigma_\theta\right)\right) + d\left(\alpha T\right) + \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta - c\left(2e_z^p - e_r^p - e_\theta^p\right)\right),
\end{aligned} \tag{4}
$$

где e_z — компонента тензора деформаций; μ — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного температурного расширения, $T = T(r)$ — температура, которая является решением стационарного уравнения теплопроводности [2, 3], $d\lambda$ — скалярный положительный множитель;

– граничные условия

$$
\begin{aligned}
\sigma_r\big|_{r=a} &= -p,\\
\sigma_r\big|_{r=b} &= 0,
\end{aligned} \tag{5}
$$

– условия неразрывности на упругопластической границе

$$
\left[\sigma_r\right] = \left[\sigma_\theta\right] = \left[u\right] = 0, \tag{6}
$$

При этом предположим, что справедливы соотношения:

$$
\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r. \tag{7}
$$

Задачу будем решать методом возмущений. Разложим имеющиеся величины в ряд по малому параметру δ, ограничившись нулевым и первым приближениями. Таким образом, решение будем искать в виде:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}, e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + \delta e_{ij}^{(1)},\\
u = u^{(0)} + \delta u^{(1)}, \mu = \frac{1}{2} + \delta\mu^{(1)},\\
\alpha = \delta\alpha^{(1)}, c = \delta c^{(1)}, \lambda = \lambda^{(0)} + \delta\lambda^{(1)}.
\end{gathered} \tag{8}
$$

В нулевом приближении имеет место плоская деформация упругопластического несжимаемого материала. Решение данной задачи известно [4].

Принимая во внимание решение задачи в нулевом приближении и алгоритм решения задачи в первом приближении (согласно работам [5, 6]), получим следующие выражения напряжений, перемещений и радиуса упругопластической границы, когда температура задана в общем виде:

$$
\sigma_r^p = -p + 2k\ln\left(\frac{r}{a}\right) + \delta\frac{3kc^{(1)}}{E}\int_a^r\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3} - \frac{1}{r}\right)dr,
$$

$$
\sigma_\theta^p = -p + 2k\ln\left(\frac{r}{a}\right) + 2k + \delta\frac{3kc^{(1)}}{E}\left(\int_a^r\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3} - \frac{1}{r}\right)dr + \frac{r_s^{(0)^2}}{r^2} - 1\right),
$$

$$
\sigma_r^e = kr_s^{(0)^2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right] + \delta\left[2E\alpha^{(1)}\int_r^b\frac{T(r)}{r}dr - 4E\alpha^{(1)}\int_r^b\frac{1}{r^3}\int T(r)r dr dr + \right.
$$

$$
\left. + \left(2E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{T(r)}{r}dr - 4E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{1}{r^3}\int T(r)r dr dr - \frac{3kc^{(1)}}{E}\int_a^{r_s^{(0)}}\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3} - \frac{1}{r}\right)dr\right)\frac{r_s^{(0)^2}}{r^2}\frac{b^2 - r^2}{r_s^{(0)^2} - b^2}\right],
$$

$$\sigma_\theta^p = kr_s^{(0)^2}\left[\frac{1}{b^2}+\frac{1}{r^2}\right]+\delta\left[2E\alpha^{(1)}\int_r^b \frac{T(r)}{r}dr - 4E\alpha^{(1)}\int_r^b \frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr - \right.$$

$$-\left(2E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r}dr - 4E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr + \frac{3kc^{(1)}}{E}\int_a^{r_s^{(0)}}\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3}-\frac{1}{r}\right)dr\right)\frac{r_s^{(0)^2}}{r^2}\frac{b^2+r^2}{r_s^{(0)^2}-b^2}+$$

$$\left.+\frac{4E\alpha^{(1)}}{r^2}\int T(r)rdr - 2E\alpha^{(1)}T(r)\right], \tag{9}$$

$$u^p = \frac{3kr_s^{(0)^2}}{2Er}+\delta\left[-\frac{3}{E}\mu^{(1)}k\left(2\ln\left(\frac{r}{r_s^{(0)}}\right)-1+\frac{r_s^{(0)^2}}{b^2}\right)r - \frac{2}{E}\mu^{(1)}\frac{kr_s^{(0)^2}}{r}+\frac{3\alpha^{(1)}}{r}\int T(r)rdr + \right.$$

$$\left.+\frac{3}{r}\left(2\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr - \alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r}dr + \frac{3kc^{(1)}}{2E^2}\int_a^{r_s^{(0)}}\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3}-\frac{1}{r}\right)dr\right)\frac{r_s^{(0)^2}b^2}{r_s^{(0)^2}-b^2}\right],$$

$$u^e = \frac{3kr_s^{(0)^2}}{2Er}+\delta\left[-\frac{3}{E}\mu^{(1)}k\frac{r_s^{(0)^2}}{b^2}r+\frac{\mu^{(1)}}{E}\frac{kr_s^{(0)^2}}{r}+\frac{3\alpha^{(1)}}{r}\int T(r)rdr + \right.$$

$$\left.+\frac{3}{r}\left(2\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr - \alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r}dr + \frac{3kc^{(1)}}{2E^2}\int_a^{r_s^{(0)}}\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3}-\frac{1}{r}\right)dr\right)\frac{r_s^{(0)^2}b^2}{r_s^{(0)^2}-b^2}\right],$$

$$r_s = r_s^{(0)}+\frac{\delta r_s^{(0)}}{2k}\left[\left(4E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr - 2E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r}dr + \frac{3kc^{(1)}}{2E}\int_a^{r_s^{(0)}}\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3}-\frac{1}{r}\right)dr\right)\frac{b^2}{r_s^{(0)^2}-b^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2E\alpha^{(1)}}{r_s^{(0)^2}}\int_{r=r_s^{(0)}} T(r)rdr - E\alpha^{(1)}T(r_s^{(0)})\right],$$

где $r_s^{(0)}$ определяется из соотношения

$$\frac{kr_s^{(0)^2}}{b^2} = -p+k+2k\ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right). \tag{10}$$

Решение стационарного уравнения теплопроводности с краевыми условиями

$$\begin{aligned} r = a : T = T_1, \\ r = b : T = T_0. \end{aligned} \tag{11}$$

имеет вид

$$T(r) = M + 2N\ln(r), \tag{12}$$

где

$$M = \frac{T_1\ln(b)-T_0\ln(a)}{\ln(b)-\ln(a)}, N = \frac{T_0-T_1}{2(\ln(b)-\ln(a))}. \tag{13}$$

Подставляя полученное поле температуры (13) в соотношения (9), получим выражения для напряжений, перемещений и радиуса упругопластической границы.

Внутри упругой области должно выполняться условие

$$\sigma_\theta - \sigma_r < 2k.$$

Тогда, с учетом полученного температурного поля и принятого соотношения (7), справедливо неравенство

$$0 < \left(k + 2\delta\alpha^{(1)}EN\frac{b^2}{r_s^{(0)^2}-b^2}\ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right)+\frac{3kc^{(1)}}{E}\left[\frac{r_s^{(0)^2}}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r_s^{(0)^2}}\right)-\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right]\right)\frac{r_s^{(0)^2}}{r^2}-\delta\alpha^{(1)}EN < k. \tag{14}$$

Подставим в (14) выражение для постоянной N

$$0<\left(k+\delta\alpha^{(1)}E\frac{T_0-T_1}{\ln(b)-\ln(a)}\frac{b^2}{r_s^{(0)^2}-b^2}\ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right)+\frac{3kc^{(1)}}{E}\left[\frac{r_s^{(0)^2}}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r_s^{(0)^2}}\right)-\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right]\right)\frac{r_s^{(0)^2}}{r^2}-$$
$$-\delta\alpha^{(1)}E\frac{T_0-T_1}{2\left(\ln(b)-\ln(a)\right)}<k. \tag{15}$$

Таким образом, получили ограничения, накладываемые на разность температур внешней и внутренней поверхностей трубы, при которых будут справедливы приведенные выше соотношения.

В дальнейшем исследование будем проводить в безразмерных величинах, поэтому все переменные, имеющие размерность напряжений, отнесем к $2k$, перемещений — к b.

Рассмотрим в качестве примера стальную трубу при следующих значениях постоянных:

$$b=2a,\ p=0.577,\ E=2.1\cdot10^5\,МПа,\ \mu=0.3,\ \delta=0.01,$$
$$k=750МПа, T_0=60°C, T_1=0°C, \alpha=1.1\cdot10^{-5}\frac{1}{°C}, c=3400МПа. \tag{16}$$

Компьютерный эксперимент

В ходе компьютерного моделирования была простроена расчетная модель толщиной 0.07 *мм*. Поскольку задача является осесимметричной, при исследовании будем рассматривать четверть трубы. В процессе моделирования задавались условия симметрии. На рис. 1 представлена конечно-элементная модель расчетной области.

Решение будем проводить в два этапа.

На первом этапе получим распределение температуры вдоль радиуса трубы, задав значения температуры на внутреннем и внешнем радиусах трубы.

На втором этапе определим распределение радиальной и окружной компонент тензора напряжений и радиальное перемещение, с учетом полученного температурного поля.

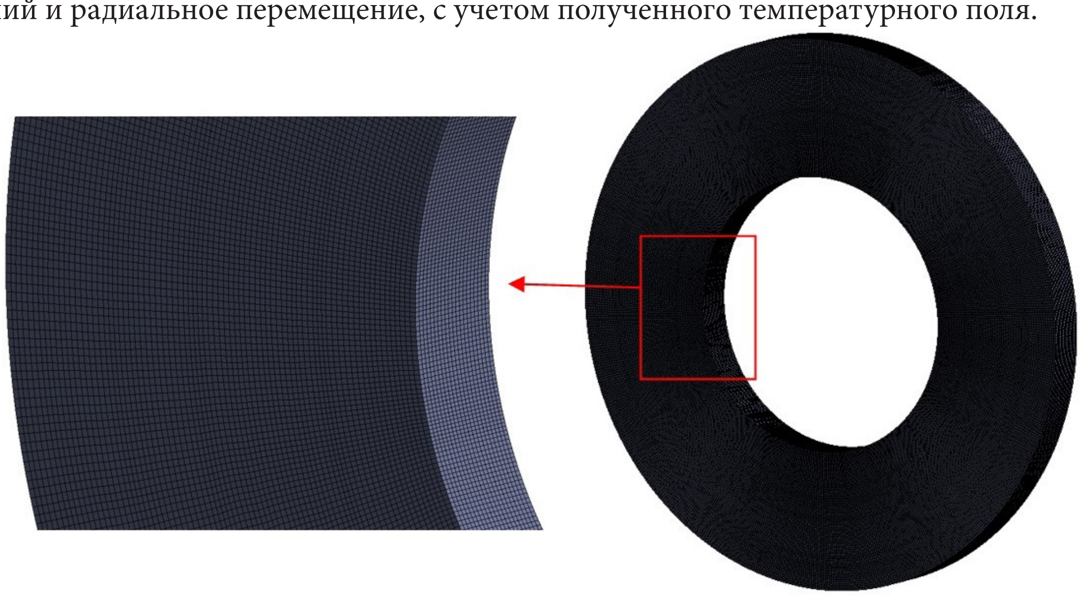


Рис. 1. Конечно-элементная модель

На рис. 2–4 представлены графики сравнений выражений радиальной компоненты перемещений, а также радиальной и окружной компонент тензора напряжений, полученных аналитическим и численным методами.

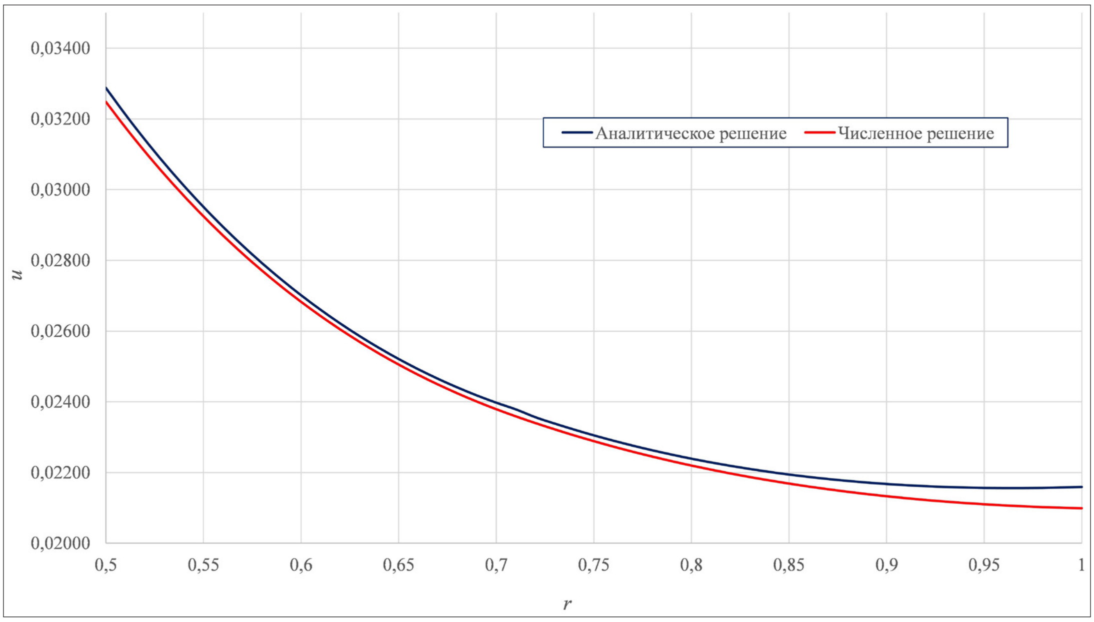


Рис. 2. Численное и аналитическое выражения радиального перемещения

В ходе решения поставленной задачи аналитическим методом было получено, что безразмерное значение радиуса упругопластической границы $r_s = 0.70896$. При компьютерном моделировании указанного процесса данное значение было равным: $r_s = 0.708002$. Относительная погрешность вычисления в таком случае составила около 0,14 %.

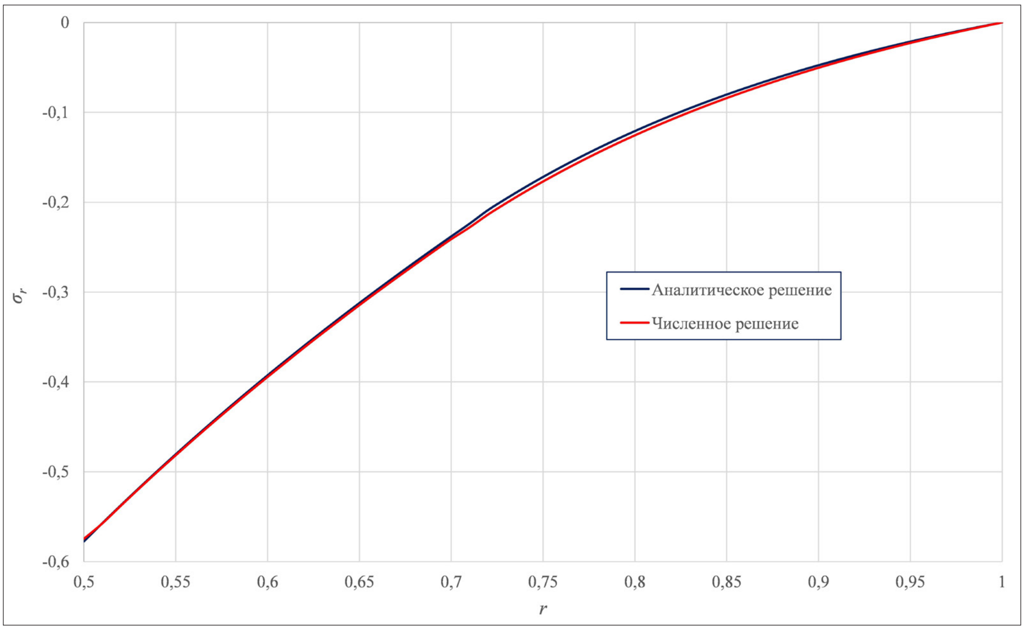


Рис. 3. Численное и аналитическое выражения радиального напряжения

В ходе решения поставленной задачи аналитическим методом было получено, что безразмерное значение радиуса упругопластической границы $r_s = 0.70896$. При компьютерном моделировании указанного процесса данное значение было равным: $r_s = 0.708002$. Относительная погрешность вычисления в таком случае составила около 0,14 %.

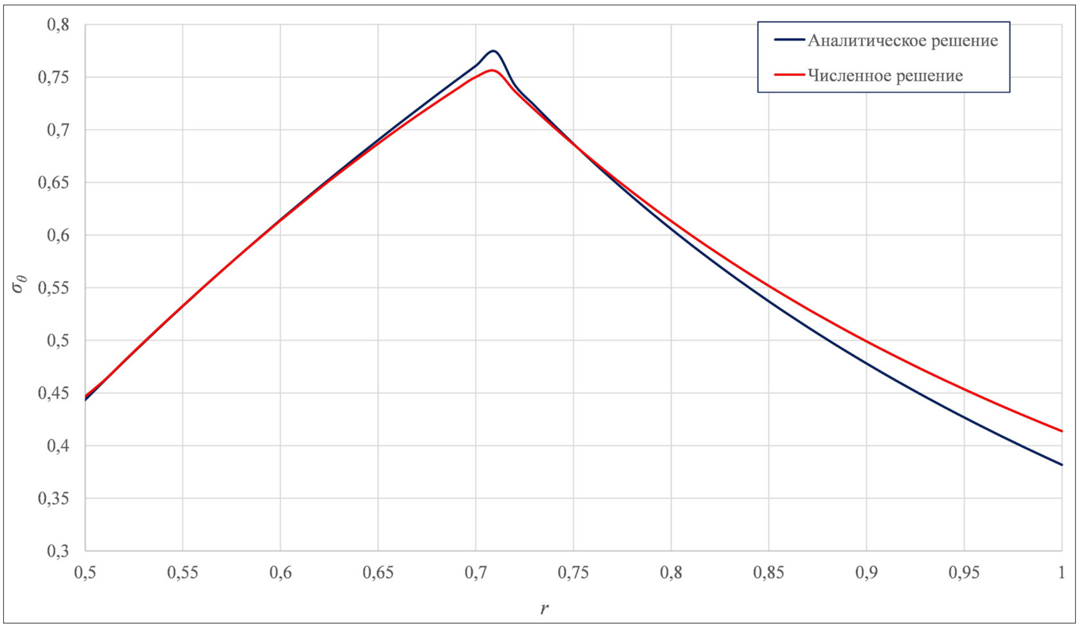


Рис. 4. Численное и аналитическое выражения окружного напряжения

Выводы

По результатам проведенного исследования можно сделать вывод, что полученное аналитическое решение в достаточной степени сходится с результатами вычислительного эксперимента. Отклонения в результатах возникают за счет принятых ограничений и выбранного метода решения задачи. Абсолютная погрешность вычисления безразмерных значений искомых величин находится в пределах величины принятого малого параметра.

Литература

1. *Ивлев Д. Д.* Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Е. В. Макаров, Ю. М. Марушкей // Изв. РАН. МТТ. – 1978. – №4. – С. 80–87.
2. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. Перевод с немецкого. – М. : Физматлит, 1963. – 253 с.
3. *Мелан Э.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус. –М. : Физматгиз, 1958. – 167 с.
4. *Ивлев Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
5. *Ковалев А. В.* К определению напряженно-деформированного состояния в упрочняющейся упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала / А. В. Ковалев, Ю. В. Малыгина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 07–09 декабря 2020 года, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет». – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2021. – С. 1306–1311.
6. *Ковалев А. В.* К расчету упрочняющейся сжимаемой упругопластической трубы с учетом температуры / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, Ю. В. Малыгина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 13–15 декабря 2021 г. – Воронеж, 2022. – С. 1191–1195.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ ТРУБЫ С УЧЕТОМ ИЗНОСА МАТЕРИАЛА

Н. В. Минаева[1], С. Ю. Гриднев[2,3], Ю. И. Скалько[3], Д. А. Никулин[1]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Воронежский государственный технический университет
[3]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Аннотация. Проведено изучение напряженно-деформированного состояния толстостенной упругой несжимаемой трубы с учетом абразивно-усталостного износа материала при сжатии. Получено условие, при выполнении которого влияние роста включений будет незначительным. Для слабоповрежденного материала это условие позволяет находить решение на основе метода возмущений с требуемой точностью.
Ключевые слова: упругость, толстостенная труба, абразивно-усталостный износ, непрерывная зависимость, метод возмущений.

Введение

В современных условиях разработки высокоэффективных материалов особое внимание уделяется изучению их механических свойств с учетом влияния дефектов, включений и износа. Износ материала, проявляющийся в виде изменения его упругих свойств, приводит к перераспределению напряжений и деформаций, что влияет на надежность конструкции.

Это особенно важно для материалов, используемых в сложных эксплуатационных условиях, таких как элементы трубопроводов, работающие под действием высокого давления.

При расчете эластомерных конструкций широко используется МКЭ и программные продукты, основанные на подобных методах. Так, в работах [1, 2] предлагается введение различных выражений упругой энергии деформации, которые учитывают слабую сжимаемость эластомера. В работе [3] предложены вариационные формулировки, наиболее приемлемые для задач исследования слабосжимаемых эластомеров. Однако применение смешанных вариационных принципов связано с увеличением порядка разрешающей системы уравнений, с нарушением положительной определенности матрицы уравнений. В работах [4–6] для учета слабой сжимаемости эластомеров предложен способ сокращенного интегрирования, состоящий в том, что поля перемещений и величины, ответственные за слабую сжимаемость, аппроксимируются различными функциями. Вопросу изучения абразивно-усталостного износа конструкций посвящены следующие работы. В работе [7] исследуется механизм износа резиновой футеровки барабанной мельницы и проводится расчет ее оптимальной толщины. Целью работы [8] является построение обобщенной теории абразивно-усталостного износа упруго-наследственных сред с помощью двухкритериального уравнения долговечности. В работе [9] рассматривается динамическая модель волнового абразивно-усталостного износа резиновой футеровки в барабанных мельницах.

Стандартный МКЭ не позволяет учитывать такого свойства эластомеров как слабая сжимаемость, когда материал имеет коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$. Разрушение эластомерной конструкции при абразивно-усталостном износе исследуется при помощи феноменологической модели [10]. Процесс поврежденности эластомера под действием внешних сил можно представить как образование и накопление в исходном материале некоторых областей, имеющих характер включений.

Цель работы заключается в определении, а также в исследовании влияния износа на распределение напряжений и перемещений в упругой трубе.

Исследование влияния износа материала

В данной работе рассматривается исследовании напряженно-деформированного состояния толстостенной упругой трубы с учетом износа материала при сжатии. Труба выполнена из несжимаемого материала, находится под действием сжимающих внутреннего и внешнего давлений [13]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau}{\partial \theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\\
&\frac{\partial \tau}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{2\tau}{r}=0\\
&\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{u}{r}=0\\
&\sigma_r-\sigma_\theta=4G\frac{\partial u}{\partial r}\\
&\tau=G\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{v}{r}\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_n\Big|_{r=\Psi_1(\theta)}=-p_1; \qquad \tau_n\Big|_{r=\Psi_1(\theta)}=0,\\
&\sigma_n\Big|_{r=\Psi_2(\theta)}=-p_2; \qquad \tau_n\Big|_{r=\Psi_2(\theta)}=0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Функции описывают форму поперечного сечения трубы в деформированном состоянии. Предполагается, что материал в начальном состоянии однороден и изотропен. Модуль образующихся включений в n раз больше модуля основного материала (в работе [12] для резины на основе СКИ-3 получено), развивающиеся включения характеризуются матрицей модулей упругости основного материала, упругие модули материала включений не зависят от времени.

С учетом вышеуказанных предположений можно построить макроскопическую характеристику эластомера в виде модуля упругости материала с изменяющимися от поврежденности свойствами

$$G=G_0\left(n+\frac{(1-n)(1-p)(n+1,5)}{(n+1,5)+p(1-n)}\right), \tag{3}$$

где G_0 — модуль упругости исходного материала $p=1-e^{-m}$ — функция, отображающая рост концентрации включений во времени, m — коэффициент снижения модуля упругости ($m=1,2$ [10]).

Для слабоповрежденного материала ($p<<1$), функцию G можно приближенно представить в виде

$$G=G_0\left(1+\left(n-1-\frac{(1-n)^2}{n+1,5}\right)\varepsilon\right), \tag{4}$$

где малый параметр ε характеризует рост концентрации включений.

При $\varepsilon=0$ задача (1), (2) допускает осесимметричное решение, описывающее состояние трубы из однородного материала [13]:

$$\sigma_r^0=\frac{2A}{r^2}+B; \qquad \sigma_\theta^0=-\frac{2A}{r^2}+B; \qquad \tau^0=v^0=0; \qquad u^0=-\frac{A}{r}$$

Граничные условия (2) в этом случае будут такими

$$\sigma_r^0\Big|_{r=\alpha+u^0(\alpha)}=-p_1; \qquad \sigma_r^0\Big|_{r=1+u^0(1)}=-p_2$$

где $\alpha=\dfrac{a}{b}$.

Из (3), (4) получаем систему уравнений относительно произвольных постоянных A и B

$$\frac{2A\alpha^2}{\left(\alpha^2 - A\right)^2} + B = -p_1; \qquad \frac{2A}{\left(1 - A\right)^2} + B = -p_2. \tag{5}$$

Для того, чтобы выяснить, при выполнении каких условий решение (3) можно брать в качестве приближенного решения задачи (1), (2) в том случае, когда функция, отображающая рост концентрации включений, мало отличаются от нуля, необходимо рассмотреть вопрос о непрерывности зависимости решения задачи (1), (2) от ε при $\varepsilon = 0$.

Как следует из теоремы о неявных функциях [13], для проведения анализа упомянутой непрерывности зависимости надо построить следующую задачу относительно вспомогательных функций $\sigma_r^1, \sigma_\theta^1, \tau^1, u^1, v^1, e^1$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\left(\sigma_r^0 + \varepsilon\sigma_r^1\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\tau^0 + \varepsilon\tau^1\right)}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r^0 + \varepsilon\sigma_r^1 - \sigma_\theta^0 - \varepsilon\sigma_\theta^1}{r} = 0 \\
\frac{\partial\left(\tau^0 + \varepsilon\tau^1\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\sigma_\theta^0 + \varepsilon\sigma_\theta^1\right)}{\partial\theta} + \frac{2\left(\tau^0 + \varepsilon\tau^1\right)}{r} = 0 \\
\frac{\partial\left(u^0 + \varepsilon u^1\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(v^0 + \varepsilon v^1\right)}{\partial\theta} + \frac{u^0 + \varepsilon u^1}{r} = 0 \\
\sigma_r^0 + \varepsilon\sigma_r^1 - \sigma_\theta^0 - \varepsilon\sigma_\theta^1 = 4(G_0 + \varepsilon G_1)\frac{\partial\left(u^0 + \varepsilon u^1\right)}{\partial r} \\
\tau^0 + \varepsilon\tau^1 = (G_0 + \varepsilon G_1)\frac{\partial\left(v^0 + \varepsilon v^1\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(u^0 + \varepsilon u^1\right)}{\partial\theta} - \frac{\left(v^0 + \varepsilon v^1\right)}{r}
\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\left.\left(\sigma_n^0 + \sigma_n^1\right)\right|_{r=\Phi_1(\theta)} &= -p_1; \qquad \left.\left(\tau_n^0 + \tau_n^1\right)\right|_{r=\Phi_1(\theta)} = 0, \\
\left.\left(\sigma_n^0 + \sigma_n^1\right)\right|_{r=\Phi_2(\theta)} &= -p_2; \qquad \left.\left(\tau_n^0 + \tau_n^1\right)\right|_{r=\Phi_2(\theta)} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Как следует из [13], функция $\Phi_i(\theta)$ в (7) с точностью до величин первого порядка малости будут такими

$$\begin{gathered}
\Phi_1\left(\theta\right) = \alpha - \frac{A}{\alpha} + u^1\left(\theta, \alpha\right) \\
\Phi_2\left(\theta\right) = 1 - A + u^1\left(\theta, 1\right).
\end{gathered} \tag{8}$$

Линеаризованная по вспомогательным функциям $\sigma_r^1, \sigma_\theta^1, \tau^1, v^1, e^1, u^1$ задача, соответствующая задаче (6)–(8), будет следующей (с учетом того, что (3) — решение задачи (1), (2) при $\varepsilon = 0$)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_r^1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau^1}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r^1 - \sigma_\theta^1}{r} = 0 \\
\frac{\partial\tau^1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta^1}{\partial\theta} + \frac{2\tau^1}{r} = 0 \\
\frac{\partial u^1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v^1}{\partial\theta} + \frac{u^1}{r} = 0 \\
\sigma_r^1 - \sigma_\theta^1 = 4\left(G_0\frac{\partial u^1}{\partial r} + G_1\left(-\frac{A}{r^2}\right)\right) \\
\tau^1 = G_0\left(\frac{\partial v^1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^1}{\partial\theta} - \frac{v^1}{r}\right)
\end{gathered} \tag{9}$$

Граничные условия (7) примут такой вид

$$\left(\sigma_r^1+\frac{d\sigma_r^0}{dr}u^1(\theta,\alpha)\right)_{r=\alpha-\frac{A}{\alpha}}=\left[\tau^1+\frac{\left(\sigma_r^0-\sigma_\theta^0\right)}{r}\frac{\partial u^1(\theta,\alpha)}{\partial\theta}\right]_{r=\alpha-\frac{A}{\alpha}}=0$$

$$\left(\sigma_r^1+\frac{d\sigma_r^0}{dr}u^1(\theta,1)\right)_{\rho=1-A}=\left[\tau^1+\frac{\left(\sigma_r^0-\sigma_\theta^0\right)}{r}\frac{\partial u^1(\theta,1)}{\partial\theta}\right]_{r=1-A}=0 \qquad (10)$$

Введем замену таким образом, чтобы выполнялось условие несжимаемости:

$$u^1=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta},\ \ v^1=\frac{\partial\Phi}{\partial r}.$$

Тогда уравнение для новой функции Φ будет таким:

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial\theta^4}+r^4\frac{\partial^4\Phi}{\partial r^4}+2r^2\frac{\partial^4\Phi}{\partial r^2\partial\theta^2}+2r^3\frac{\partial^3\Phi}{\partial r^3}-2r\frac{\partial^3\Phi}{\partial r\partial\theta^2}+4\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}-r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+r\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0$$

Будем искать решение в виде:

$$\Phi=rR(r)\varphi(\theta).$$

В результате имеем

$$rR\varphi^{(4)}+(2rR+2r^2R'+2r^3R'')\varphi''+(r^5R^{(4)}+6r^4R'''+5r^3R''-r^2R'+rR)\varphi=0.$$

Положим $\varphi(\theta)=\sin n\theta$ тогда

$$\Phi(r,\theta)=(B_1r^{n+2}+B_2r^{-n}+B_3r^n+B_4r^{2-n})\sin n\theta.$$

Зная выражение для $\Phi(r,\theta)$ определим выражения для σ_r^1, τ^1 и u^1.

$$\sigma_r^1=\grave{u}\breve{u}\grave{u}{}_0(\grave{u}\grave{u}\grave{u}1)(\quad+2)\ {}_1{}^{n}-\ (\quad+1)\ {}_2{}^{-(n+2)}-\ (\quad-1)\ {}_3{}^{n-2}-(2-\quad)(1-\quad)\ {}_4{}^{-n}-$$

$$-n^2B_1r^n+\frac{n^3}{n+2}B_2r^{-(n+2)}-\frac{n^3}{n-2}B_3r^{n-2}+n^2B_4r^{-n}+$$

$$+5(n+2)B_1r^n+\frac{5n^2}{n+2}B_2r^{-(n+2)}-\frac{5n^2}{n-2}B_3r^{n-2}-5(2-n)B_4r^{-n}-$$

$$-4B_1r^n+\frac{4n}{n+2}B_2r^{-(n+2)}-\frac{4n}{n-2}B_3r^{n-2}+4B_4r^{-n})\cos n\theta+G_1\left(-\frac{2A}{r^2}\right) \qquad (11)$$

$$\tau^1=G_0(-(n+1)(n+2)B_1r^n-n(n+1)B_2r^{-(n+2)}-n(n-1)B_3r^{n-2}-(2-n)(1-n)B_4r^{-n}+$$

$$+n^2(B_1r^n+B_2r^{-(n+2)}+B_3r^{n-2}+B_4r^{-n})-$$

$$-(n+2)B_1r^n-nB_2r^{-(n+2)}-nB_3r^{n-2}-(2-n)B_4r^{-n})\sin n\theta$$

$$u^1=-n(B_1r^{n+1}+B_2r^{-n-1}+B_3r^{n-1}+B_4r^{1-n})\cos n\theta.$$

Как следует из (3), (11), два первых условия в (10) совпадают, и два оставшихся тоже совпадают. Следовательно, для определения произвольных постоянных c_1 и c_2 из (10), (11) получаем следующую систему уравнений

$$\left[\left(\alpha-A\alpha^{-1}\right)^4+\alpha^2A\right]c_1+\left(1+\alpha^{-2}A\right)c_2=0,$$

$$\left[\left(1-A\right)^4+A\right]c_1+\left(1+A\right)c_2=0. \qquad (12)$$

Как следует из (11), (12), задача (9), (10) имеет нетривиальное решение при выполнении следующего условия

$$\Delta=\left[\left(\alpha-A\alpha^{-1}\right)^4+\alpha^2A\right]\left(1+A\right)-\left(1+\alpha^{-2}A\right)\left[\left(1-A\right)^4+A\right]=0. \qquad (13)$$

Из (5) получаем следующее уравнение относительно произвольной постоянной A

$$p_1 - p_2 = 2A\left[\left(\frac{1}{1-A}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - A}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Обозначим через p_* наибольший отрицательный, а через p_{**} наименьший положительный корень системы уравнений (14) и следующего уравнения

$$p = 2A\left[\left(\frac{1}{1-A}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - A}\right)^2\right]. \tag{15}$$

Тогда условия существования нетривиального решения задачи (9), (10) запишем так

$$\begin{gathered} p_1 - p_2 = p_* \\ p_1 - p_2 = p_{**} \end{gathered} \tag{16}$$

Например, при $\alpha = 0,8;$ $p_* \approx -0,502;$ $p_{**} \approx 0,034.$

Итак, если точка, определяемая координатами параметров внешних нагрузок p_1 и p_2, не выходит из области, ограниченной графиками функций (16), то характеристики напряженно-деформированного состояния трубы, т.е. решения задачи (1), (2), непрерывно зависят от ε при $\varepsilon = 0$. Следовательно, при достаточно малом росте концентрации включений (слабый абразивно-усталостный износ материала) напряженно-деформированное состояние трубы будет мало отличаться от осесимметричного, описываемого решением (3), (5). Для учета влияния включений для указанных параметров давлений можно найти решение методом возмущений с требуемой точностью.

Заключение

В проведенной работе исследовано напряженно-деформированное состояние толстостенной упругой несжимаемой трубы с учетом абразивно-усталостного износа материала при сжатии. Полученные результаты показывают, что износ материала оказывает существенное влияние на перераспределение напряжений и деформаций в конструкции.

Разработанное условие, при выполнении которого влияние роста включений становится незначительным, позволяет находить приближенные решения на основе метода возмущений с заданной точностью для слабоповрежденного материала. Это условие может быть использовано при проектировании и анализе элементов трубопроводных систем, работающих в сложных эксплуатационных условиях.

Проведенный анализ подчеркивает важность учета абразивно-усталостного износа и слабой сжимаемости материала для повышения точности расчетов и надежности конструкций. Предложенные подходы могут быть интегрированы в существующие численные методы, включая метод конечных элементов, что расширяет их применимость для исследования сложных инженерных задач.

Таким образом, результаты работы вносят вклад в развитие методов расчета конструкций из несжимаемых материалов, подвергающихся абразивно-усталостному износу, и могут быть полезны для практического применения в различных отраслях промышленности.

Литература

1. *Penn R. W.* Volume Changes Accompanylug Extenslon of Rubber // Trans. Soc. Rheol. – 1970. – Vol. 14, № 4. – P. 507–517.

2. *Дымников С. И., Мейерс И. Р., Эрдманис А. Г.* Упругие потенциалы для слосжимаемых эластомерных материалов // Вопр. динамики и прочности. – 1983. – Вып. 40. – С. 98–108.

3. *Пиан Т., Ли С.* О методе конечных элементов для почти несжимаемых материалов // Ракетная техника и космонавтика. – 1976. – № 6. – С. 147–149.

4. *Zienkiewicz O. C., Too J., Taylor R. L.* Reduced integration technique in general analysis of plates and schells // Intern. J. Numerical Methods Eng. – 1971. – Vol. 3, № 3. – P. 275–290.

5. *Oden I. T., Kikuchi N.* Finite element methods for constrained problems in elasticity // Intern. J. Numer. Meth. Eng. – 1983. – Vol. 18, № 5. – P. 701–725.

6. *Кабриц С. А., Мальков В. М., Мансурова С. Е.* Нелинейные уравнения плоского слоя для трех моделей эластомерного материала // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 1. – С. 38–47.

7. Стецюк М. В., Луценко С. Н. Проблемы эксплуатации резиновой футеровки вибропитателей при добыче урановых руд // Геотехническая механика. – 2013. – Вып. 108. – С. 229–235.

8. *Кобец А. С., Дырда В. И., Калганков Е. В., Цаниди И. Н.* Энергетическая оценка износа антифрикционных материалов // Геотехническая механика. – 2012. – Вып. 106. – С. 78–90.

9. *Дырда В. И., Калашников В. А., Евенко С. Л., Маркелов А. Е., Хмель И. В., Стойко А.* Динамическая модель волнового абразивно-усталостного разрушения резиновой футеровки в барабанных мельницах // Геотехническая механика. – 2012. – Вып. 106. – С. 15–24.

10. *Гребенюк С. Н., Бова А. А., Юречко В. З.* Напряженно-деформированное состояние эластомерных конструкций при абразивно-усталостном износе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, вып. 4, ч. 1. – С. 455–463.

11. *Чижик Е. Ф., Дырда В. И.* Феноменологическая модель разрушения резины при абразивно-усталостном износе // Геотехническая механика. –1999. – № 11. – С. 226–256.

12. *Дырда В. И.* Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях. – Киев : Наук.думка, 1988. – 232 с.

13. *Минаева Н. В., Сабынин Д. В.* О напряженно-деформированном состоянии стохастически неоднородной толстостенной трубы // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2021. – № 2. – С. 157–164.

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

С. А. Нестеров

Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН

Аннотация. Исследованы задачи оптимизации переменных термомеханических характеристик неоднородных тел. В качестве функционалов качества выступают либо функционал податливости, либо максимальное смещение, либо средняя температура. В качестве ограничений принято условие постоянства суммарного значения термомеханических характеристик либо их ограничение в некоторых пределах. Для решения задачи оптимизации модуля Юнга нагретого стержня применяется метод сопряженных уравнений и вариационный принцип Лагранжа. Метод возмущений применяется для решения задачи оптимизации коэффициента теплового расширения нагретой трубы. С учетом дополнительного ограничения снизу на коэффициент теплопроводности стержня с граничными условиями первого рода построено оптимальное решение без особых точек для управляющей функции.

Ключевые слова: модуль Юнга, коэффициент температурного расширения, коэффициент теплопроводности, стержень, труба, оптимизация, вариационный принцип Лагранжа, метод возмущений, неоднородный материал.

Введение

Функционально-градиентные материалы (ФГМ) по сравнению с традиционными материалами находят все более широкое применение для повышения термоустойчивости объектов, подвергающихся длительным термическим нагрузкам. ФГМ — это композиционные двухфазные материалы, созданные путем механического перемешивания металла и керамики, процентное содержание объемных фракций которых непрерывно меняется по объему [1]. В работах [1–3] рассмотрены различные технологии изготовления ФГМ с заданными свойствами, в том числе применение аддитивных технологий, методов порошковой металлургии, физического и химического осаждения слоев. Создание желаемых распределений смещений, напряжений и температуры в твердом теле путем оптимизации распределения внутри тела термомеханических характеристик — сложная и актуальная научно-техническая задача [3, 4].

Исследованию оптимизационных задач механики и теплопроводности посвящено достаточно большое число работ [4–12]. Так, в работах [5, 6] для поиска оптимальных распределений геометрических характеристик для минимизации веса и увеличения прочности применяются как аналитические, так и численные методы. Среди аналитических методов исследования оптимизационных задач важное место занимают: метод построения сопряженных уравнений на основе вариационного принципа Лагранжа [7]; метод возмущений (метод разложения по малому параметру) [8].

В работах [8, 9] представлены результаты оптимизации физических характеристик слоистых упругих и термоупругих тел, а в работах [10–12] — неоднородных упругих и теплопроводных тел со смешанными граничными условиями. Однако несколько важных с практической точки зрения оптимизационных задач термомеханики все еще не решены. Кроме того, не все оптимальные с математической точки решения можно реализовать на практике. Большой вопрос, например, вызывает случай, описанный в работе [12], когда коэффициент теплопроводности стержня обращается в нуль во внутренней точке, которую называют сингулярной. Однако эта особенность является недостатком, который на данный момент не исправлен.

Настоящее исследование посвящено построению аналитических решений ряда новых задач оптимизации переменных термомеханических характеристик, в том числе коэффициента температурного расширения и модуля Юнга стержня и трубы для смешанных граничных условий и при ограничениях управляющих функций на среднее значение или значение в некоторых пределах; коэффициента теплопроводности стержня с источником теплоты и одинаковой температурой на торцах и ограничениями на среднее и минимальное значение управляющей функции.

1. Оптимальное распределение модуля Юнга стержня

В качестве первого примера рассмотрим применение вариационного принципа Лагранжа для решения задачи оптимального распределения переменного модуля Юнга $E(x)$ неоднородного стержня, который нагревается с одного торца. Пусть на защемленном торце $x=0$ стержня поддерживается нулевая температура, а на свободном торце $x=l$ — тепловой поток q_0. В качестве функционала качества выступает жесткость системы (функционал податливости), а в качестве ограничения — среднее интегральное значение модуля упругости.

Задача несвязанной термоупругости сводится к задаче изотермической теории упругости с фиктивными массовыми $\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)T(x)\right)$ и поверхностными $\alpha(l)T(l)$ силами. Пусть $T(x)=\frac{q_0}{k}x$ — распределение температуры по длине стержня. Коэффициент температурного расширения α считаем постоянным и равным α_0.

Вариационная обезразмеренная постановка задачи теории упругости для стержня с фиктивными силами имеет вид:

$$\frac{d}{dz}\left(\bar{E}(z)\frac{dU}{dz}\right)=Q, \quad 0\le z\le 1, \tag{1}$$

$$U(0)=0, \quad \bar{E}(1)\frac{dU}{dz}(1)=Q, \tag{2}$$

$$\int_0^1 \bar{E}(z)dz=s_0, \tag{3}$$

$$J_1=\int_0^1 QUdz->min_{\bar{E}}. \tag{4}$$

Здесь $z=\frac{x}{l}$, $U=\frac{u}{l}$, $\bar{E}=\frac{E}{E_0}$, $Q_1=\frac{q_0 l}{k}\alpha_0$, E_0 — некоторое характерное значение модуля Юнга, k — коэффициент теплопроводности.

Пусть $v(z)$ — сопряженная функция, такая, что $v(0)=0$. Тогда слабая постановка задачи (1), (2) имеет вид:

$$L_0=\int_0^1 \bar{E}\frac{dU}{dz}\frac{dv}{dz}dz+Q_1\int_0^1 v(z)dz-Q_1v(1), \tag{5}$$

Расширенный функционал Лагранжа, полученный путем присоединения к слабой постановке (5), функционала качества (4) и изопериметрического условия (3), умноженного на множитель λ, имеет вид:

$$L_1=Q_1\int_0^1 U(z)dz+\int_0^1 \bar{E}\frac{dU}{dz}\frac{dv}{dz}dz+Q_1\int_0^1 v(z)dz-Qv(1)+\lambda\left(\int_0^1 \bar{E}(z)dz-s_0\right). \tag{6}$$

Согласно [12] выполним следующие действия: найдем первую вариацию функционала (6) и приравняем ее к нулю, далее воспользовавшись формулой интегрирования по частям, и группируя слагаемые по независимым вариациям $\delta\bar{E}$, δU, δv, получим:

а) постановку прямой задачи (1), (2);
б) постановку сопряженной задачи

$$\frac{d}{dz}\left(\bar{E}(z)\frac{dv}{dz}\right)=Q_1, \tag{7}$$

$$v(0)=0, \quad \bar{E}(1)\frac{dv}{dz}(1)=0; \tag{8}$$

в) условие оптимальности

$$\frac{dU}{dz}\frac{dv}{dz}+\lambda=0. \tag{9}$$

Выразив $\frac{dU}{dz}$ из задачи (1), (2), а $\frac{dv}{dz}$ из задачи (7), (8) и подставив их в (9), получим

$$\bar{E}(z)=\sqrt{\frac{Q_1 z(1-z)}{\lambda}}. \tag{10}$$

Подставив (10) в изопериметрическое условие (3), получим $\lambda=\frac{\pi^2 Q_1}{64 s_0}$.

Тогда выражение для оптимального распределения упругого модуля примет вид:

$$\bar{E}_{opt}(z)=\frac{8s_0}{\pi}\sqrt{z(1-z)}. \tag{11}$$

При значениях $s_0=Q_1=1$ проведено сравнение значений функционала (4) в случае однородного стержня $\bar{k}_{\text{hom}}=1,\ U_{\text{hom}}=\frac{z^2}{2}$ и неоднородного с оптимальным законом коэффициента теплопроводности (11). Выигрыш от оптимизации составил 18 %.

Из (11) следует, что управляющая функция $\bar{E}_{opt}(z)$ обращается в нуль в торцевых точках $z=0$ и $z=1$. Однако этот случай в принципе не является проблемой при практической реализации.

2. Оптимальное распределение коэффициента температурного расширения трубы

В качестве второго примера рассмотрим применение метода возмущений для решения задачи оптимизации радиального распределения коэффициента температурного расширения $\alpha(r)$ неоднородной трубы. Пусть на защемленной внутренней поверхности $r=r_1$ поддерживается нулевая температура, на внешней поверхности $r=r_2$ — тепловой поток q_0. В качестве функционала качества выступает радиальное смещение на внешней поверхности $r=r_2$, а в качестве ограничения — изменение коэффициента температурного расширения в некоторых пределах. Модуль Юнга E считаем постоянным, а распределение температуры по радиусу трубы имеет вид $T(r)=\frac{q_0 r_2}{k}\ln\frac{r}{r_1}$.

Вариационная обезразмеренная постановка задачи теории упругости для трубы с фиктивными силами имеет вид:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d}{d\xi}(\xi U)\right)=q(\xi), \quad q(\xi)=Q_2\frac{d}{d\xi}\left(\bar{\alpha}(\xi)W(\xi)\right), \qquad \xi_0\le\xi\le 1, \tag{12}$$

$$U(\xi_0)=0, \quad \frac{dU}{d\xi}(1)+U(1)=Q_2\bar{\alpha}(1)\ln 1, \tag{13}$$

$$\alpha_{\min}\le\bar{\alpha}(\xi)\le\alpha_{\max}, \tag{14}$$

$$J_2=U(1)->min_{\alpha}. \tag{15}$$

Здесь $\xi = \dfrac{r}{r_2}$, $\xi_0 = \dfrac{r_1}{r_2}$, $U = \dfrac{u}{r_2}$, $\bar{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\alpha_0}$, $W = \alpha_0 T$, $Q_2 = (1+\nu)\alpha_0 \dfrac{q_0 r_2}{k}$.

В предположении о слабой неоднородности материала согласно [7, 12] полагаем

$$\bar{\alpha}(\xi) = 1 + \delta f(\xi), \quad U(\xi) = U_0 + \delta U_1, \quad \delta = \frac{\alpha_{max} - \alpha_{min}}{\alpha_{max} + \alpha_{min}}, \quad 0 < \delta < 1. \tag{16}$$

Подставив (16) в (12), (13), и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра δ, получим следующие задачи для нулевого и первого приближений.

При δ^0:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d}{d\xi}(\xi U_0)\right) = Q_2 \frac{d}{d\xi}\left(\ln\frac{\xi}{\xi_0}\right), \quad \xi_0 \le \xi \le 1, \tag{17}$$

$$U_0(\xi_0) = 0, \quad \frac{dU_0}{dr}(1) + U_0(1) = Q_2 \ln \xi_0^{-1}, \tag{18}$$

решением которой является функция

$$U_0(\xi) = \frac{Q_2}{2\xi} \ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2. \tag{19}$$

При δ^1:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d}{d\xi}(\xi U_1)\right) = Q_2 \frac{d}{d\xi}\left(f(\xi)\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)\right), \quad \xi_0 \le \xi \le 1, \tag{20}$$

$$U_1(\xi_0) = 0, \quad \frac{dU_1}{d\xi}(1) + U_1(1) = Q_2 f(1) \ln \xi_0^{-1}, \tag{21}$$

решением которой является функция

$$U_1(\xi) = \frac{Q_2}{\xi} \int_{\xi_0}^{\xi} \ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \frac{f(\xi)}{\xi} \xi d\xi. \tag{22}$$

Согласно [12] для функции $f(\xi)$ установим следующие ограничения:

$$\int_{\xi_0}^{1} f(\xi)\xi d\xi = 0, \quad |f(\xi)| \le 1, \quad \int_{\xi_0}^{1}\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 \xi d\xi \le C_0^2. \tag{23}$$

Расширенный функционал, полученный путем присоединения к (15), первого и третьего условий из (23), умноженных на множители Лагранжа λ_1 и λ_2 соответственно, имеет вид:

$$L_2 = Q_2 \int_{\xi_0}^{1} \ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)\frac{f(\xi)}{\xi}\xi d\xi + \lambda_1 \int_{\xi_0}^{1} f(\xi)\xi d\xi + \lambda_2 \int_{\xi_0}^{1}\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 \xi d\xi. \tag{24}$$

Из условия стационарности функционала (24) следует постановка краевой задачи для нахождения $f(\xi)$:

$$f'' = -\frac{1}{2\lambda_2}\left(\frac{Q_2}{\xi}\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) - \lambda_1\right), \quad f'(\xi_0) = 0, \quad f'(1) = 0. \tag{25}$$

Постоянная λ_1 определяется из условия $\displaystyle\int_{\xi_0}^{1}\left(\frac{Q_2}{\xi}\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) - \lambda_1\right)\xi d\xi = 0$, а постоянная λ_2 должна удовлетворять неравенству $|f(\xi)| \le 1$.

Отсюда следует, что:

$$f(\xi) = Q_2 \left(\frac{\xi \ln^2\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)}{2} - \xi \ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) + \xi - \frac{\ln^2\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)}{4(1-\xi_0)} \right). \tag{26}$$

Относительный выигрыш по функционалу (15), рассчитанный по формуле $\frac{U_1(1)}{U_0(\xi_0)} \delta \cdot 100\,\%$ составляет $43\delta\,\%$.

3. Оптимальное распределение коэффициента теплопроводности стержня

В качестве третьего примера рассмотрим задачу теплопроводности для неоднородного стержня длины l с тепловыми источниками ϑ, на обоих торцах которого задана одинаковая температура.

Рассмотрим подход к оптимизации переменного коэффициента теплопроводности стержня, при котором управляющая функция нигде в нуль не обращается. Будем искать такую функцию $k(x)$, которая удовлетворяет следующим двум условиям: изопериметрическому условию и ограничению снизу. В качестве функционала качества выступает средняя интегральная температура.

Обезразмеренная постановка вариационной задачи теплопроводности для стержня имеет вид [12]:

$$\frac{d}{dz}\left(\bar{k}(z) \frac{dW}{dz} \right) + \vartheta = 0, \quad 0 \le z \le 1, \tag{27}$$

$$W(0) = W(1) = 0, \tag{28}$$

$$\int_0^1 \bar{k}(z) dx = k_0, \tag{29}$$

$$\bar{k}(z) \ge k_{\min}, \tag{30}$$

$$J_3 = \int_0^1 W(z) dz -> min_{\bar{k}}. \tag{31}$$

Без учета неравенства (30) поставленная задача решена в работе [12]. Однако такая постановка задачи является сингулярной, т. к. производная $\frac{dW}{dz}$ терпит скачок 1-го рода в особой точке (в центре стержня), в которой коэффициент теплопроводности обращается в нуль. Осуществим построение оптимального решения без особой точки, учтя дополнительное ограничение снизу на управляющую функцию (30).

Дополнительное условие (30) будет выполнено, если ввести функцию $c^2(z) = \bar{k}(z) - k_{\min} \ge 0$.

Рассмотри следующий функционал:

$$J = \int_0^1 \chi(z) \left(c^2(z) - \bar{k}(z) + k_{\min} \right). \tag{32}$$

Пусть λ_3 и χ — множители Лагранжа. Составим расширенный функционал путем сложения (32) с функционалом (31) и изопериметрическим условием (29), умноженным на λ_3. Находя стационарное значение расширенного функционала, получим:

а) уравнение теплопроводности (27);

б) модифицированное условие оптимальности

$$(W')^2 = \lambda_3 - \chi(z); \tag{33}$$

в) дополнительное условие на функции $\chi(z)$ и $c(z)$ в виде

$$\chi(z)c(z)=0. \tag{34}$$

Функция $c(z)$ введена таким образом, что обращается в нуль в области, где срабатывает ограничение $\bar{k}(z)\ge k_{\min}$. В этой области $\bar{k}(z)=\text{const}$ и поэтому можно построить аналитическое решение задачи. Из (34) следует, что в оставшейся части стержня $\chi(z)=0$. Следовательно (33) упрощается до ранее используемого в [12] условия оптимальности $(W')^2=\lambda_3$. Это условие позволяет путем интегрирования найти общий вид функций $W(z)$, $\bar{k}(z)$. Поскольку коэффициент теплопроводности не обращается в нуль, то исключаются случаи, при которых W' терпит скачки (из соображений непрерывности теплового потока).

В силу симметрии граничных условий будем искать симметричные относительно середины отрезка решения в виде:

$$\bar{k}_{opt}=\begin{cases}\bar{k}_1(z), z<z_0\\ \bar{k}_2(z), z_1\le z\le 0.5\end{cases},\quad W_{opt}=\begin{cases}W_1(z), z<z_0\\ W_2(z), z_0\le z\le 0.5\end{cases}. \tag{35}$$

где $W_1(z)=z$, $W_2(z)=\dfrac{1}{k_{\min}}\left(-\dfrac{\vartheta z^2}{2}+a_1z+a_2\right)$, $\bar{k}_1(z)=-\vartheta z+a_3$, $\bar{k}_2(z)=k_{\min}$.

За счёт выбранной структуры решения граничное условие $W(0)=0$ удовлетворяются автоматически. Для нахождения неизвестных a_1, a_2, a_3, z_0 выпишем условия сопряжения по температуре и тепловому потоку:

$$W_1(z_0)=W_2(z_0),\quad \bar{k}_1(z_0)W_1'(z_0)=\bar{k}_2(z_0)W_2'(z_0), \tag{36}$$

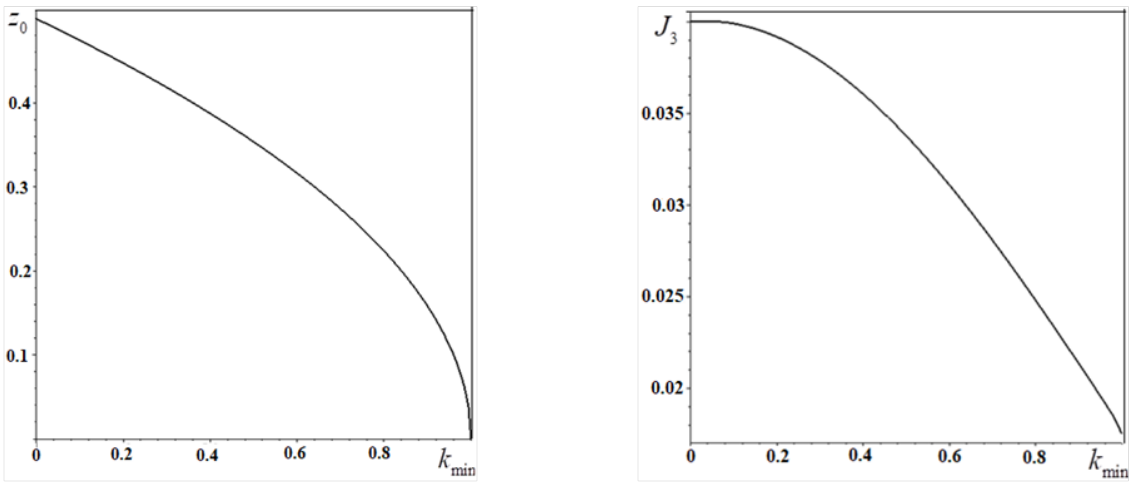
а также условие непрерывности коэффициента теплопроводности в точке сопряжения и изопериметрическое условие (30)

$$\bar{k}_1(z_0)=k_{\min},\quad \int_0^{z_0}\bar{k}_1(z)dz+k_{\min}(0.5-z_0)=\frac{k_0}{2}. \tag{37}$$

Для различных значений $k_{\min}$ при $k_0=\vartheta=1$ найдены: точка сопряжения z_0, коэффициент теплопроводности, температура и функционал качества (31).

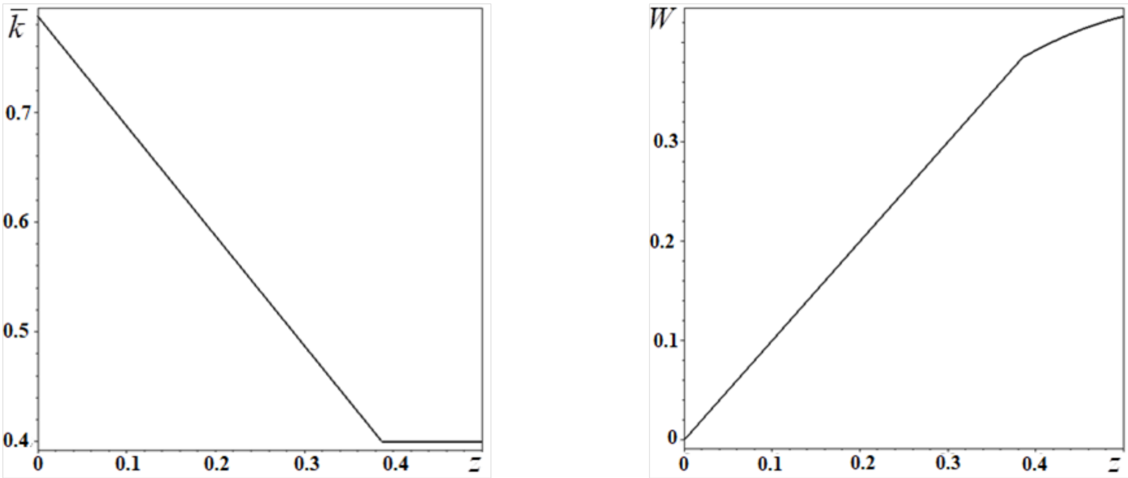
На рис. 1 представлены график зависимости: а) точки сопряжения z_0; б) функционала качества (31) от нижнего ограничения $k_{\min}$.

На рис. 2 приведено оптимальное распределение: а) закона изменения коэффициента теплопроводности $\bar{k}(z)$; б) температуры $W(z)$ при $k_{\min}=0.4$, $k_0=1$, $\vartheta=1$.



а) б)

Рис. 1. График зависимости параметров от нижнего ограничения $k_{\min}$: точки сопряжения (а); функционала качества J_3 (б)



а) *б)*

Рис.2. График оптимального распределения по координате z: коэффициента теплопроводности (а); температуры (б)

Заключение

Рассмотрены новые задачи оптимизации термомеханичских характеристик неоднородных тел. Задача термоупругости для стержня со смешанными граничными условиями решалась на основе вариационного метода Лагранжа; для трубы — метода возмущений; задача теплопроводности для стержня с источником теплоты и одинаковой температурой на торцах — путем введение ограничения снизу на управляющую функцию и нового функционала, позволяющего построить оптимальное решение, которое не обращается в нуль внутри стержня. Проведенные расчеты показали, что уменьшение значений функционалов качества составляло более 18 % в случае оптимальных законов распределения термомеханических характеристик по сравнению с их постоянными значениями.

Благодарности

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-11-00265, https://rscf.ru/project/22-11-00265/ в Южном федеральном университете.

Литература

1. *Birman V.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures / V. Birman, L. W. Byrd // Applied Mechanics Reviews. – 2007. – Vol. 60(5). – P. 195–216.

2. *Быков Ю. В.* Создание маталлокерамических функционально-градиентных материалов спеканием при микроволновом нагреве / Ю. В. Быков, С. В. Егоров, А. Г. Еремеев и др. // Физика и химия обработки материалов. – 2011. – № 4. – С. 52–61.

3. *Wetherhold R. C.* The Use of Functionally Graded Materials to Eliminated or Control Thermal Deformation / R. C. Wetherhold, S. Seelman, J. Wang // Composites Science and Technology. – 1996. – № 56. – P. 1099–1104.

4. *Tong Z.-X.* Optimizing thermal conductivity distribution for heat conduction problems with different optimization objectives / Z.-X. Tong, M.-J. Li, J.-J. Yan, W.-Q. Tao // International Journal of Heat Mass Transfer. – 2018. – Vol. 119. – P. 343–354.

5. *Павлов С. П.* Оптимизация формы термоупругих тел / С. П. Павлов, В. А. Крысько. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2000. – 160 с.

6. *Кунташев П. А.* О некоторых свойствах оптимальных термоупругих проектов при фиксированных полях напряжений или деформаций / П. А. Кунташев, Ю. В. Немировский // Прикладная математика и механика. – 1985. – Т. 49, № 3. – С. 476–484.

7. *Братусь А. С.* Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций / А. С. Братусь, В. М. Картвелишвили // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 6. – С. 119–139.

8. *Баничук Н. В.* Оптимизация формы упругих тел / Н. В. Баничук. – Москва: Наука, 1980. – 255 с.

9. *Алехин В. В.* Проектирование поперечно-слоистой консоли минимальной массы при ограничении на максимальный прогиб / В. В. Алехин // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, №4. – С. 104–110.

10. *Rammerstorfer F. G.* On the optimal distribution of the Young's modulus of a vibrating prestressed beam / F. G. Rammerstorfer // Journal of Sound and Vibration. – 1974. – Vol. 37. – P. 140–145.

11. *Warner W. H.* Optimal Design Problems for Elastic Bodies by Use of the Maximum Principle / W. H. Warner // Journal of Elasticity. – 2000. – Vol. 59. – P. 357–367.

12. *Ватульян А. О.* Некоторые аналитические решения в задачах оптимизации переменного коэффициента теплопроводности / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Владикавказский математический журнал. – 2024. – Т. 26, № 3. – С. 33–46.

УДК 539.3

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ПОЛОСТИ

В. Б. Пеньков, Л. В. Левина, В. В. Затонская

Липецкий государственный технический университет

Аннотация. Термоэластостатическое состояние многополостного тела описано набором определяющих соотношений среды. Представлена разрешающая система уравнений. Описаны наборы характеристик, содержащихся в элементах изоморфных гильбертовых пространств внутренних и граничных состояний тела. Скалярные произведения изоморфных пар элементов из обоих пространств равны между собой (гильбертов изоморфизм). Проведены оценки состояний двухполостного шара, подверженного давлению и потокам тепла изнутри полостей. Выполнены и прокомментированы расчеты.
Ключевые слова: термоэластостатика, метод граничных состояний, МГС, сферические полости, многополостность, краевые задачи термоупругости.

Введение

Работа посвящена исследованию влияния термических воздействий на напряженно-деформированное состояние (НДС) равновесной термоупругой среды и является развитием темы [1]. Круг задач, ведущих к достижению цели:

1) описание внутреннего состояния термоупругой среды и ему соответствующего граничного состояния;

2) формирование базиса пространства состояний двухполостного ограниченного тела;

3) развитие аппарата метода граничных состояний (МГС) к решению классических задач термоэластостатики (ТЕ-задач) многосвязных тел;

4) решение конкретных задач для кругового цилиндра со сферическими полостями.

1. Описание состояния термоэластостатической среды

Набор определяющих соотношений, описывающих термоэластостатическое состояние 3D-тела V с границей ∂V описывается определяющими соотношениями [2], содержащими 16 уравнений:

$$T_{,ii} + {}^{1}\!/_{\kappa} Q = 0, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = {}^{1}\!/_{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T\,\delta_{ij}, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0. \tag{4}$$

Уравнение Пуассона (1) отвечает за распределение температуры T во внутренних точках $x = \{x_1, x_2, x_3\} \in V$; здесь κ — параметр температуропроводности, Q — объемная плотность тепловых источников. Соотношения Коши (2) выражают компоненты тензора деформаций ε_{ij} через составляющие вектора перемещений u_i линейной упругой изотропной среды. Закон Дюамеля — Неймана (3) обобщает закон Гука на предмет учета температурных деформаций: $\theta = \varepsilon_{kk}$ — объемная упругая деформация, λ, μ — упругие параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера, α — параметр температурного расширения среды. Уравнениями равновесия (4) приведены при учете объемных сил X_i произвольной физической природы.

Частные решения, отвечающие регулярным силам X_i и теплоисточникам Q строятся эффективно [3], поэтому неоднородные составляющие линейной системы уравнений (1)–(4) можно из рассмотрения исключить. Разрешающий набор дифференциальных уравнений при отсутствии неоднородных составляющих уравнений $(X_i = 0,\ Q = 0)$ состоит из системы уравнений Ламе и уравнения Лапласа:

$$\begin{gathered} \mu\, u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{j,ji} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,i} = 0, \\ T_{,ii} = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

Это — замкнутая разрешающая система уравнений в частных производных эллиптического типа относительно температуры и перемещений.

Описываем температурное состояние тела избыточным набором согласованных характеристик, совокупность всех вариантов их наборов $\xi^T = \{T, T_{,i}\} \in \Xi^T$ образует термостатическое пространство внутренних состояний. Ему изоморфно пространство граничных состояний с элементами $\gamma^T = \left\{T, \dfrac{dT}{d\mathbf{n}}\right\} \in \Gamma^T$. Аналогичный подход используем для представления пространств состояний упругой среды: $\xi^E = \{u_i^E, \varepsilon_{ij}^E, \sigma_{ij}^E\} \in \Xi^E$, $\gamma^E = \{u_i^E, p_i^E\} \in \Gamma^E$. Здесь символом E помечены характеристики состояний, отвечающих обобщенному закону Гука $\sigma_{ij}^E = \lambda \sigma_{kk}^E\ \delta_{ij} + 2\mu\ \varepsilon_{ij}^E$. В целом характеристики состояния учитывают как «приобретенные» температурные деформации $\varepsilon_{ij}^T = \alpha T \delta_{ij}$ и «потерянные» напряжения, $\sigma_{ij}^T = -(3\lambda + 2\mu)\alpha T \delta_{ij}$:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^T,\ \ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E + \sigma_{ij}^T.$$

Соответствующее граничное состояние имеет характеристики $\gamma = \{u_i^E, u_i^T, p_i^E, p_i^T, T, dT/d\mathbf{n}\} \in \Gamma$, $\gamma^E = \{u_i^E, p_i^E\} \in \Gamma^E$.

Пространства Ξ, Γ являются гильбертовыми со скалярными произведениями $(a, b > 0)$

$$\begin{gathered} (\xi^m, \xi^n)_\Xi = a(\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E + b(\xi^{T(m)}, \xi^{T(n)})_T, \\ (\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E = \int_V \sigma_{ij}^{E(m)} \varepsilon_{ij}^{E(n)} dV, \quad (\xi^{T(m)}, \xi^{T(n)})_T = \int_V T_{,i}^{(m)} T_{,i}^{(n)} dV. \end{gathered}$$

— в пространстве внутренних состояний Ξ, и

$$\begin{gathered} (\gamma^m, \gamma^n)_\Xi = a(\gamma^{E(m)}, \gamma^{E(n)})_E + b(\gamma^{T(m)}, \gamma^{T(n)})_T, \\ (\gamma^{E(m)}, \gamma^{E(n)})_E = \int_{\partial V} p_i^{(m)} u_i^{(n)} dS, \quad (\gamma^{T(m)}, \gamma^{T(n)})_T = \int_{\partial V} T^{(m)} \frac{dT}{d\mathbf{n}}^{(n)} dS \end{gathered}$$

— в пространстве граничных состояний Γ. Для изоморфных пар элементов пространств $\Xi \leftrightarrow \Gamma$ справедливо равенство

$$(\xi^{(m)}, \xi^{(n)})_\Xi = (\gamma^{(m)}, \gamma^{(n)})_\Gamma.$$

Скалярные произведения предназначены для ортогонализации базисов обоих пространств, которую можно проводить как в Ξ, так и в Γ.

Любой элемент гармонического базиса порождает три состояния пространства Ξ^E (следствие общих решений Аржаных — Слободянского [2]), и независимо от этого, один элемент пространства Ξ^T. Их «чистка» [4] формирует базисы соответствующих пространств, используемых в МГС [5]. Следовательно, каждый элемент пространства гармонических функций позволяет построить три элемента вида $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, 0, 0\} \in \Xi$ и один элемент вида $\xi = \{u_i^T, \varepsilon_{ij}^T, \sigma_{ij}^T, T, T_{,i},\} \in \Xi$, где символом T помечены частные решения от объемных сил теплового характера.

После ортогонализации базиса, использования разложения Фурье

$$\xi = \sum_k c_k \xi^{(k)},\ \gamma = \sum_k c_k \gamma^{(k)} \tag{6}$$

и обработки граничных условий система уравнений (1), (5) приводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье c_j

$$\sum_j a_{kj} c_j = b_k, \tag{7}$$

где коэффициенты a_{kj} определяются через поверхностные интегралы от базисных элементов $\gamma^{(k)}, \gamma^{(j)}$ либо через объемные интегралы от $\xi^{(k)}, \xi^{(j)}$, а правые части используют кроме $\gamma^{(k)}$ еще и содержимое граничных условий.

Решение усеченной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (БСУ) проводится с учетом двух факторов: 1) насыщение суммы Бесселя; 2) невязка построенного граничного состояния с условиями на границе тела.

Классические варианты краевых задач ТЕ-среды исходят из формулирования ГУ для равновесной упругости и термостатики: «1», «2» означают соответственно первую и вторую задачи теории упругости, «D», «N» — условия Дирихле и Неймана. Легко понимается смысл основных задач термоупругости, обозначаемых как «1D», «1N», «2D», «2N». Нетрудно понять смысл аббревиатуры смешанных задач «12D», «1DN» и др.

2. Термоэластостатическое состояние двухполостного шара

Нижеизложенное представлено в обезразмеренной форме. Шар радиуса $R_1 = 1$ содержит центральную полость радиуса $R_2 = 1/2$ и «возмущающую» полость радиуса $R_3 = 1/8$, расположенную в позиции $\{0, 0, 3/4\}$ (рис. 1).

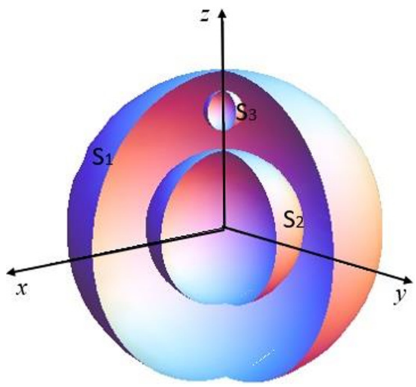


Рис.1. Шар с двумя полостями

Обе полости являются источниками тепла либо холода. Потоки тепла через границы S_1, S_2, S_3 полагаются равномерными с интенсивностями $T_{nk} = \dfrac{dT}{d\mathbf{n}_k}$, $k \in \{1, 2, 3\}$. При вычислениях принимались значения $T_{n1} = \mp\frac{65}{64}$, $T_{n2} = \pm 4$, $T_{n3} = \pm 1$. Значения тепловых потоков отвечают условию стационарности температурного поля в теле: количество тепла в теле V не меняется с течением времени и, следовательно, имеет место баланс температуры (1). Полагается отсутствие объемных теплоисточников ($Q = 0$). Верхние знаки в T_{nk} отвечают источникам тепла, нижние — источникам холода.

Кроме тепловых полости оказывают на тело механические воздействия давлением интенсивности $p_0 = 1$. Внешняя граница свободна от нагрузки.

Набор граничных условий характеризует краевую задачу как задачу класса «1N»:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = T_{nk}, (x, y, z) \in S_k, \quad \mathbf{p} = \begin{cases} 0, (x, y, z) \in S_1, \\ p_0, (x, y, z) \in S_2, \\ p_0, (x, y, z) \in S_3. \end{cases}$$

Для проведения решения средствами МГС были сформированы и ортонормированы отрезки базисов пространств состояний Ξ^T, Ξ^E количеством 180 и 35 единиц соответственно и выполнены решения задачи Неймана для уравнения Лапласа и первой основной задачи для уравнений Ламе. Суммирование механических характеристик привело к построению полей перемещений, деформаций, напряжений в упругом теле (параметры Ламе $\lambda = \mu = 1$ при коэффициенте Пуассона $\nu = 1/4, \alpha = 0.2$). На рис. 2 представлены распределения температуры в обоих вариантах теплового воздействия; фрагменты осевых купюр полей вблизи «возмущающей» полости показаны укрупненно.

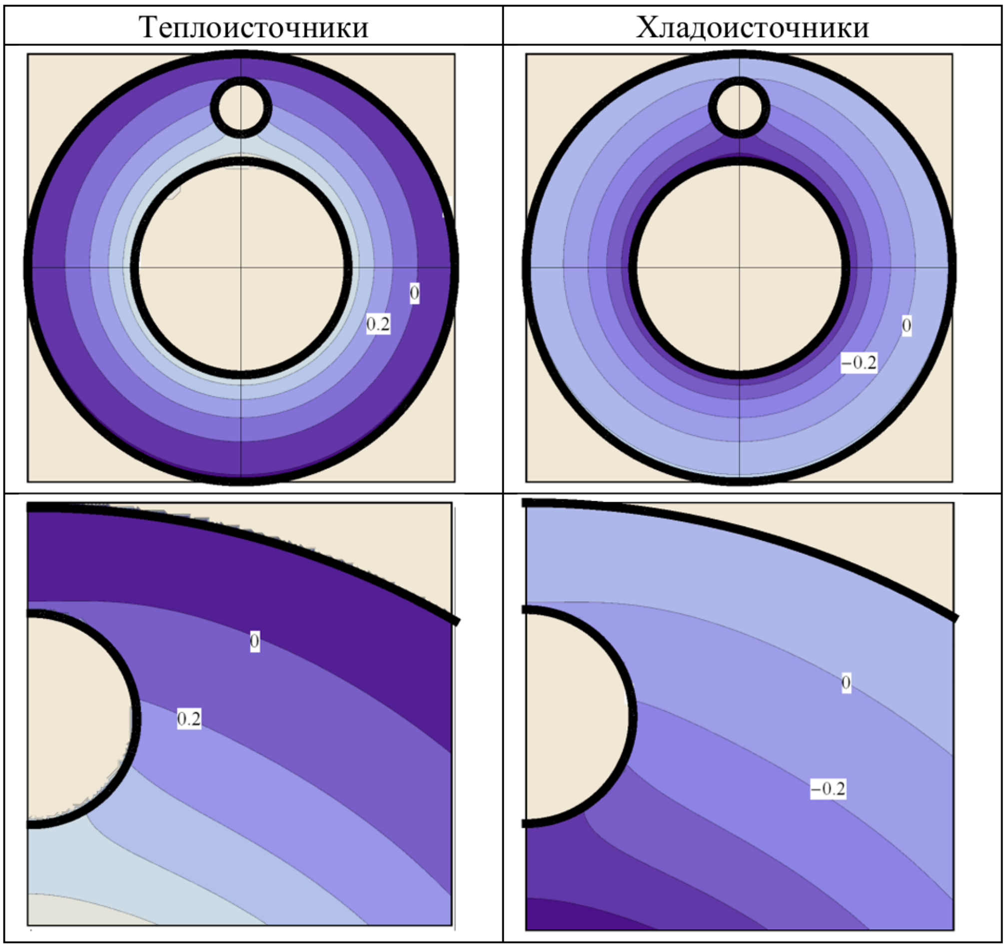


Рис. 2. Распределение температуры при источниках тепла и холода

Температурные поля от тепло- и хладоиточников имеют противоположные характеры. Эти же диаграммы в соответствующих масштабах отвечают характерам распределения «приобретенных деформаций» и «потерянных напряжений». Фрагмент диаграммы, выделенной вблизи «возмущающей» полости, более качественно иллюстрирует окрестные температурные и напряженно-деформационные характеристики, обусловленные внешними тепловыми воздействиями.

На рис. 3 для обоих вариантов тепловых воздействий приведены купюры, поясняющие распределение радиальных $\sigma_r = \sigma_{xx}\big|_{y=0}$, окружных $\sigma_\theta = \sigma_{yy}\big|_{y=0}$, осевых $\sigma_z = \sigma_{zz}\big|_{y=0}$, сдвиговых $\sigma_{rz} = \sigma_{xz}\big|_{y=0}$ напряжений в осесимметричном теле.

Анализ полей напряжений ТЕ-состояний позволяет сделать конкретные выводы:

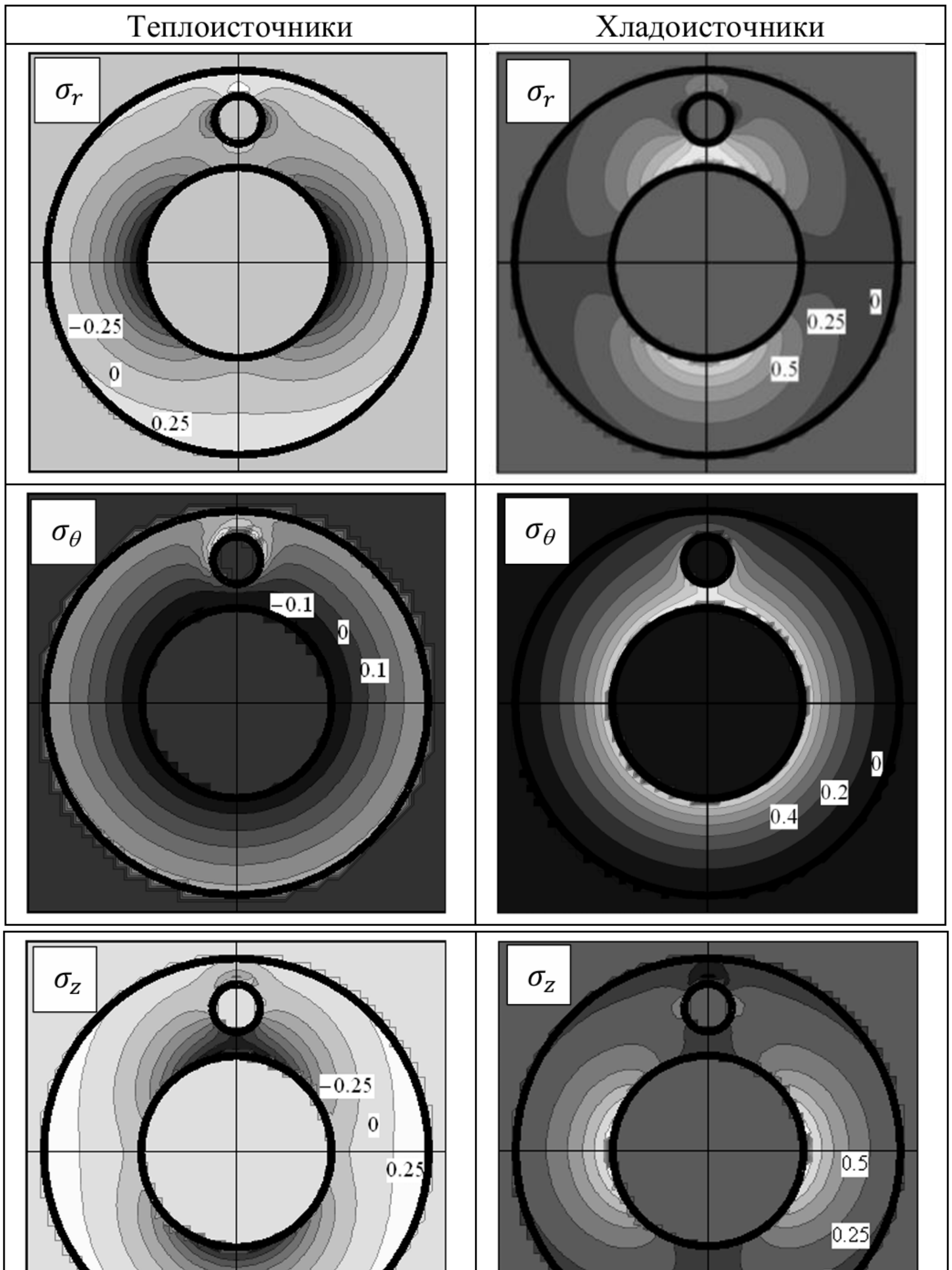
1) радиальные напряжения σ_r вблизи экватора центральной полости при теплоисточниках имеют естественный характер: убывающее сжатие радиальных волокон при перемещении от полости в внешней границе; при охлаждении они незначительны. По-видимому, это вызва-

но наличием «возмущающей» полости. радиальные волокна в слое между полостями удлиняются слабо при теплоисточниках и весьма существенно при источниках холода;

2) поля окружных напряжений σ_θ получают существенные искажения воздействием «возмущающей» полости: при нагреве окружные волокна существенно удлиняются в слое между полостями, при охлаждении — между внешней границей и S_3;

3) осевые напряжения σ_z — существенно сжимающие вблизи полюсов и слабо сжимающие при воздействии хладоисточников. Вблизи экватора внешней границы он приобретают существенный растягивающий характер, но при охлаждающих воздействиях удлинения волокон незначительны. Вблизи оси симметрии тела между S_3 и S_1 осевые напряжения незначительны;

4) напряжения сдвига σ_{rz} имеют классический упругий характер. Они от температурных воздействий не зависят.



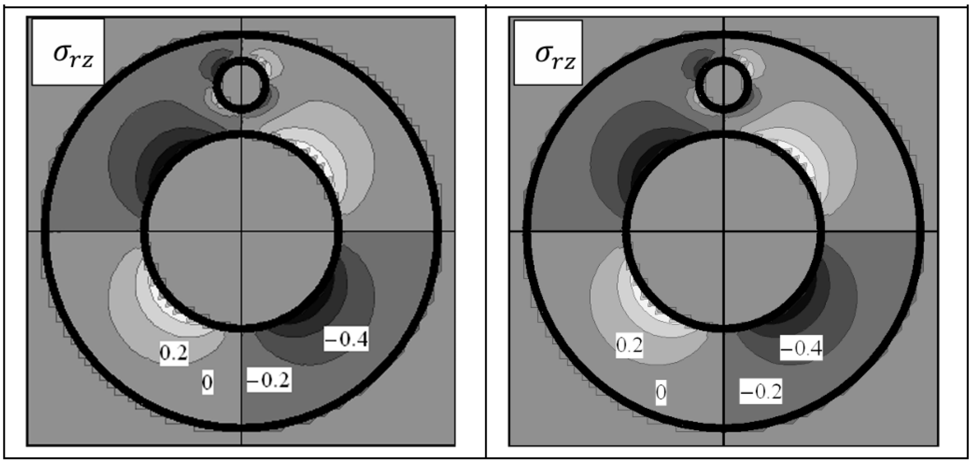


Рис. 3. Распределение радиальных, окружных, осевых, сдвиговых напряжений

Заключение

Проведенные исследования состояния двухполостного шарового тела позволяют сделать ряд выводов.

1. Набор определяющих соотношений (1)–(4) термоэластостатики является замкнутым и позволяет сформировать структуры внутренних и граничных состояний для многополостного тела.

2. Разрешающие уравнения (5) для ТЕ-статики порождают эффективный способ формирования изоморфных счетных базисов гильбертовых пространств состояний многополостного тела. Гильбертов изоморфизм, обусловленный равенством скалярных произведений для изоморфных пар элементов пространств внутренних и граничных состояний ТЕ-тела позволяет эффективно проводить ортогонализацию базисов $\Xi \leftrightarrow \Gamma$.

3. Выполнен численно-аналитический анализ ТЕ-состояния двухполостного тела (шара с двумя сферическими полостями). результаты расчетов проиллюстрированы и прокомментированы. Отмечено существенное искажение полей внутренних состояний наличием «возмущающей» полости малого диаметра при двух вариантах потоков температурных воздействий на тело со стороны обеих полостей.

Ближайшие перспективы исследований просматриваются в планах варьирования уровней температурных воздействий, в допущении температурных воздействий альтернативного характера (одна полость — нагревающая, вторая — охлаждающая), в варьировании распределения потоков от теплоисточников через границы тела, в отклонении в постановках задач от цилиндрической симметрии.

Литература

1. *Penkov V. B.* An Effective Method for Assessing the Thermoelastostatic State of the Cavity Body / V. B. Penkov, L. V. Levina, M. Yu. Levin // 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2023. – 2023. – P. 165–170.

2. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М. : Наука, 1979. – 744 с.

3. *Пеньков В. Б.* Метод опорного базиса построения частного решения линейного неоднородного операторного уравнения математической физики / В. Б. Пеньков, Л. В. Левина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2022. – № 3. – С. 91–101.

4. *Пеньков В. Б.* Эффективный статистический метод организации базиса пространства состояний эластостатического 3D-тела / В. Б. Пеньков, Л. В. Левина, Г. С. Наумова, С. А. По-

номарев // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – № 7. – С. 72–77.

5. *Пеньков В. Б.* Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости / В. Б. Пеньков, Л. В. Саталкина. – Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., 2012. – 108 с.

6. *Penkov V. B.* The use of the method of boundary states to analyse an elastic medium with cavities and inclusions / V. B. Penkov, L. V. Satalkina, A.S. Shulmin // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2014. – Vol 78, No 4. – P. 384–394.

УДК 539.3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ — МИТЧЕЛЛА

К. Н. Пестов[1], М. А. Гузев[2], О. Н. Любимова[3]

[1]Владивостокский филиал Российской таможенной академии
[2]Институт прикладной математики ДВО РАН
[3]Дальневосточный федеральный университет

Аннотация. В работе получен ковариантный вид уравнений Бельтрами-Митчелла, позволяющий прояснить их геометрический смысл. Перспектива дальнейших исследований связана с новыми модельными представлениями в механике деформируемого твердого тела в рамках римановой геометрии.
Ключевые слова: уравнения Бельтрами — Митчелла, тензор Риччи, условия совместности Сен-Венана.

Введение

Актуальность работы определяется прежде всего проблемой теоретического описания особенностей динамики локализации деформаций и дефектов в материалах со сложной реологией. Новые теоретические представления о поведении материалов, содержащих дефекты, а следовательно, и нетипичные сложные структурно-геометрические особенности, связаны прежде всего с неклассическими подходами к моделированию физической среды. С конца прошлого века в работах А. Кадич, Д. Эделен, В. Е. Панина, С. К. Годунова, В. П. Мясникова и М. А. Гузева сложилось новое направление в конструировании новых моделей для описания структурно-деформационных особенностей механического поведения различных материалов на основе неевклидовой геометрии, неравновесной термодинамики и методологии механики сплошной среды с изменением гипотезы о совместности деформаций. В исследованиях [1–3] в рамках неевклидовой модели в механики получены новые модельные уравнения, в работах [4–5] на их основе получены аналитические зависимости проясняющие феномен зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземной выработки. При изучении предлагаемого нового направления в рамках подходов римановой геометрии, авторами работы, замечены простые и естественные выводы некоторых известных уравнений механики твердого тела. Например, стандартных уравнений Бельтрами — Митчелла, которые выводятся из уравнений совместности Сен-Венана [6], в том числе, и для римановых пространств путем преобразований компонент тензора Римана [7] или вариационного принципа Кастильяно [8]. В данной работе эти уравнения получаются естественным образом при вычислении компонент тензора Риччи сплошной среды в деформированном состоянии. Известно, что для трехмерного пространства тензор кривизны Римана полностью определяется тензором Риччи [9]. Причем в трехмерном пространстве независимых компонент тензора кривизны Римана всего 6 из 81. Тензор Риччи представляет собой симметричный тензор второго ранга, у которого так же 6 (в трехмерном пространстве) независимых компонент, получаемый сверткой двух индексов в тензоре кривизны. Несмотря на то, что для классических моделей оба этих тензора равны нулю, выражение тензора Риччи в деформациях или напряжениях может быть полезно в расширении этих моделей на римановы многообразия.

1. Тензор Риччи в терминах деформаций и напряжений

Пусть сплошная среда в недеформированном состоянии (отчетной конфигурации) описывается системой координат с компонентами метрического тензора g_{ij} и компонентами связности Леви-Чивита Γ^i_{kl}. Тензор Риччи в данном случае тривиален

$$\hat{R} = 0.$$

В деформированном состоянии (актуальной конфигурации) компоненты метрического тензора и компоненты связности, ассоциированной с этой метрикой, порождают тензор Риччи с компонентами

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{jk}}{\partial x^i} + \tilde{\Gamma}^i_{km}\tilde{\Gamma}^m_{ji} - \tilde{\Gamma}^i_{im}\tilde{\Gamma}^m_{jk},$$

где компоненты связности Леви-Чивита равны

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{im}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \tilde{g}_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{g}_{kl}}{\partial x^m}\right), \quad \tilde{g}_{ij} = g_{ij} + 2\varepsilon_{ij}.$$

Компоненты метрических тензоров актуальной и отчетной конфигурации связаны через компоненты тензора деформации

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + 2\varepsilon_{ij}.$$

Прямое вычисление тензора Риччи в первом порядке по деформациям дает

$$\hat{R} = \Delta\hat{\varepsilon} + \nabla\nabla Tr(\hat{\varepsilon}) - \nabla\left(\nabla\cdot\hat{\varepsilon}\right) - \left(\nabla\left(\nabla\cdot\hat{\varepsilon}\right)\right)^T,$$

где $Tr(\hat{\varepsilon})$ — след тензора деформаций, $(\nabla(\nabla\cdot\hat{\varepsilon}))^T$ — тензор, транспонированный к $\nabla(\nabla\cdot\hat{\varepsilon})$. Если закон Гука записать через параметры Ламэ в виде

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu}\left(\hat{\sigma} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}Tr(\hat{\sigma})\hat{g}\right),$$

то подставляя его в тензор Риччи, получается

$$\hat{R} = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma}) - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\hat{g}\Delta Tr(\hat{\sigma}) + \Delta\hat{\sigma} - \nabla(\nabla\cdot\hat{\sigma}) - \left(\nabla\left(\nabla\cdot\hat{\sigma}\right)\right)^T\right].$$

2. Тензор Риччи в терминах деформаций и напряжений

При выполнении уравнений равновесия

$$\nabla\cdot\hat{\sigma} + \vec{F} = 0,$$

где $\vec{F}$ — вектор объемных сил, тензор Риччи примет вид

$$\hat{R} = \frac{1}{2\mu}\left[\Delta\hat{\sigma} + \left(\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\right)\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma}) - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\hat{g}\Delta Tr(\hat{\sigma}) + \nabla\vec{F} + \left(\nabla\vec{F}\right)^T\right].$$

При этом скалярная кривизна будет иметь вид

$$R = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\Delta Tr(\hat{\sigma}) + \nabla\cdot\vec{F}\right].$$

В классической постановке тензор Риччи для актуальной конфигурации так же считается равным нулю (сплошная среда погружена в трехмерное евклидовое пространство). Используя условие равенства кривизны нулю, в компонентах тензора Риччи можно исключить слагаемое с $\Delta Tr(\hat{\sigma})$.

Равенство нулю тензора Риччи и есть уравнения Бельтрами — Митчелла

$$\hat{R} = \frac{1}{2\mu}\left[\Delta\hat{\sigma} + \left(\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\right)\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma}) + \nabla\vec{F} + \left(\nabla\vec{F}\right)^T + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F}\right] = 0,$$

или в более привычных технических константах E и ν

$$\Delta\hat{\sigma} + \frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma}) = -\nabla\vec{F} - \left(\nabla\vec{F}\right)^T - \frac{\nu}{1-\nu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F}.$$

Так как для тензора Риччи справедливо дифференциальное тождество Бьянки [9]

$$\nabla\cdot\hat{R} = \frac{1}{2}\nabla R,$$

то очевидно, что и уравнения Бельтрами — Митчелла не являются полностью независимыми. В общем случае существует три независимых дифференциальных тождества на эти уравнения.

Заключение

Получена ковариантная связь в линейном приближении тензора Риччи с тензором деформаций, а для линейной упругой среды с тензором напряжений. Показано, что классические уравнения Бельтрами — Митчелла совпадают с условием евклидовости материального континуума, записанного для трехмерного пространства в терминах тензора Риччи.

Литература

1 *Гузев. М. А., Мясников В. П.* Неевклидова структура поля внутренних напряжений сплошной среды //Дальневост. матем. журн. – 2001. – 2:2. – С. 29–44.

2. *Guzev M. A.* The Affine-Metric Structure of an Elastoplastic Model of a Continuum // Proc. Steklov Inst. Math. – 1998. – 223. – P. 23–30.

3. *Гузев М. А.* Равновесные состояния в калибровочной теории упругости // Докл. РАН. – 1996. – 351:3. – С. 326–328.

4. *Гузев М. А., Макаров В. В.* Реализация подхода физической мезомеханики при моделировании геосреды // Физ. мезомех. – 2020. – Т. 23, № 6. – С. 25–32.

5. *Гузев М. А., Макаров В. В.* Деформирование и разрушение сильно сжатых горных пород вокруг выработок. Монография. – Владивосток : Дальнаука, 2007. – 237 с.

6. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. Учебник для университетов. – 3-е изд., доп. – М. : Высшая школа, 1976. – 272 с.

7. *Азанов Н. П.* Уравнения совместности Сен-Венана и Бедьтрами–Митчелла в римановом пространстве // Тр. геом. сем. – 1989. – Т. 19. – С. 9–13.

8. *Немцев Е. А., Галимов К. З.* Вывод динамических условий совместности напряжений из вариационного принципа Кастильяно / /Исслед. по теор.пластин и оболочек. – 1973. – вып. 10. – С. 332–337.

9. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

УДК 539.3

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ЧАСТОТНОГО МЕТОДА ДИАГНОСТИКИ НДС АРМАТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А. Л. Попов[1,2], А. А. Хади[2], Д. А. Челюбеев[1]

[1]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*
[2]*Московский государственный строительный университет*

Аннотация. В работе продемонстрирована возможность неповреждающей частотной диагностики продольного усилия в стержне, моделирующем арматурный элемент, при которой возбуждение и регистрацию частот поперечных колебаний натяжного элемента производится без вскрытия канала, в котором расположен натяжной элемент, с использованием небольшого выступающего участка арматурного элемента, свободного от растягивающего усилия. Предложена простая теоретическая модель, адекватно описывающая зависимость частот собственных колебаний арматурного элемента с анкерным зажимом от продольной силы.
Ключевые слова: арматурный стержень, сила натяжения, неповреждающая диагностика, поперечные колебания, частоты.

Введение

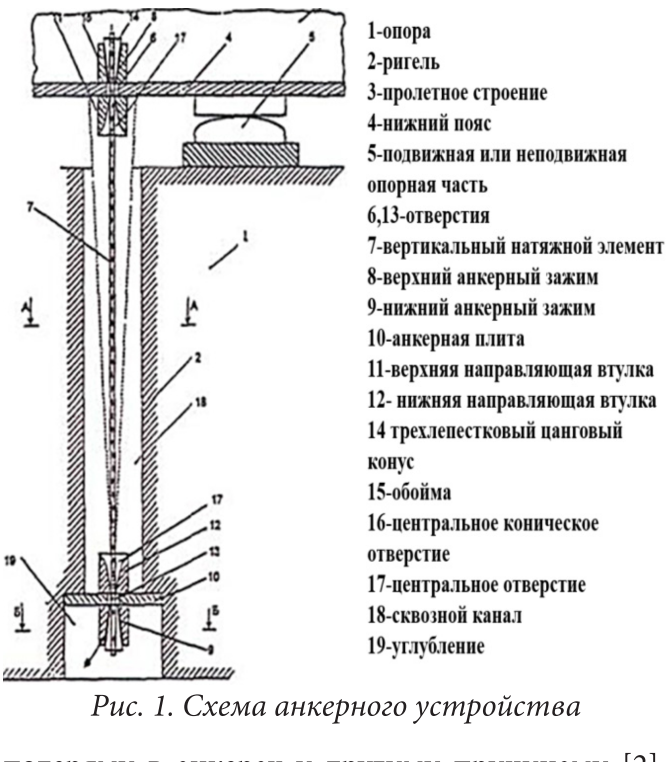


Рис. 1. Схема анкерного устройства

Анкерные устройства в мостовых конструкциях, обладающие податливостью только в одном продольном направлении, используются для ограничения поперечных перемещений пролетного строения моста, и — как антисейсмическое устройство для предотвращения сброса пролетного строения с опор. На рис.1 приведена принципиальная схема выполнения анкерного устройства, где штриховыми линиями обозначены положения натяжного элемента в процессе перемещения пролетного строения [1]. Для натяжения вертикальных натяжных элементов 7 используют гидравлические домкраты мощностью 20 тс.

В процессе эксплуатации проектное натяжение имеет тенденцию к ослаблению. Разница с усилием натяжения по проекту объясняется различными потерями: релаксацией напряжения в натяжном элементе, потерями в анкерах и другими причинами [2]. Вследствие этого возникает необходимость контроля усилия натяжения. Статические и динамическая методики контроля усилия в натяжных элементах описаны в [3].

Динамический метод состоит в установлении связи между частотой собственных поперечных колебаний арматурного элемента и действующей в нём продольной силой натяжения. Для возбуждения и регистрации собственных колебаний требуется свободный доступ к элементу, для чего обычно производится вскрытие канала, в котором расположен арматурный элемент. Ниже предложена модификация частотного метода, обеспечивающая возбуждение и регистрацию частот поперечных колебаний натяжного элемента без вскрытия канала. Для этого будет использоваться небольшой выступающий участок арматурного элемента, свободный от растягивающего усилия.

1. Стержневая модель натяжного элемента

Представим расчётную модель натяжного элемента в виде стержня, растянутого силой N и шарнирно опёртого с дополнительной упругостью в отношении поворотов (рис. 2). С помощью дополнительной упругости учитывается угловая жёсткость анкерных закреплений, которая считается заранее неизвестной. Она определяется по совпадению одной из собственных частот поперечных колебаний модели с соответствующим экспериментальным значением при заданной величине растягивающей силы.

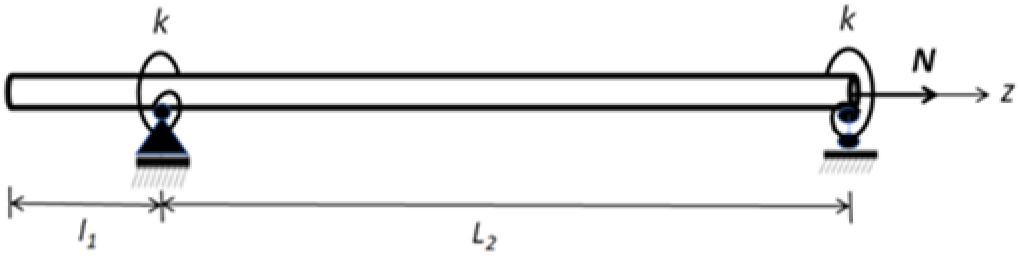


Рис. 2. Расчётная модель натяжного элемента

Будем считать, что $l_1 \ll l_2$, и поэтому выступающий участок не оказывает заметного влияния на собственные частоты стержня. Отметим, что на выступающий участок не передаётся сила N.

Уравнение колебаний стержня и граничные условия имеют вид

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - N\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \rho\,\mathrm{F}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

$$W = 0, \quad EI\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - k\frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{1}$$

$$W = 0, \quad EI\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + k\frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = l_2,$$

где $W = W(z,t)$ — динамический прогиб стержня, E, ρ — модуль упругости и плотность материала стержня, J, F — момент инерции и площадь поперечного сечения стержня, k — дополнительная угловая жёсткость в шарнирных опорах, создаваемая анкерным креплением.

Общее решение может быть представлено в форме:

$$W(z,t) = X(z)\sin(\omega t + \varphi),$$

$$X(z) = C_1 \operatorname{sh}\beta z + C_2 \operatorname{ch}\beta z + C_3 \sin\gamma z + C_4 \cos\gamma z, \tag{2}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\rho F\omega^2}{EJ}}}, \quad \gamma = \sqrt{-\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\rho F\omega^2}{EJ}}}.$$

Подстановка выражения (2) в граничные условия (1) приводит к системе четырёх однородных алгебраических уравнений, приравняв нулю определитель которой, получаем частотное уравнение:

$$\left\{2k\gamma\left(\beta^2+\gamma^2\right)\cos\gamma l - \left[\beta^4 + \beta^2\left(2\gamma^2+k^2\right) + \gamma^2\left(\gamma^2-k^2\right)\right]\sin\gamma l\right\}\operatorname{sh}\beta l -$$

$$-2k\beta\left[\left(\beta^2+\gamma^2\right)\sin\gamma l \operatorname{ch}\beta l - k\gamma\left(\cos\gamma l \operatorname{ch}\beta l - 1\right)\right] = 0, \quad l = l_2.$$

При $k = 0$ оно сводится к уравнению для шарнирно-опёртого стержня, растянутого продольной силой [4].

2. Экспериментальный образец. Методика измерений

В качестве образца использовался стальной цилиндрический стержень длиной 335 мм, диаметром 6 мм с резьбой на концах. Стержень закреплялся в растягивающей установке посредством гаек (рис. 3а). Вначале изучались поперечные колебания открытого стержня при ударном возбуждении между гайками крепления, выполняющими роль анкерного закрепления. Затем возбуждение и регистрация колебаний осуществлялись через выступающий конец стержня (рис. 3б). Для уменьшения влияния звукоизлучения основной части стержня (между гайками), эта часть была закрыта кожухом со строительным войлоком.

а *б*

Рис. 3. Экспериментальный образец в установке: а) общий вид; б) в кожухе

На рис. 4 представлена схема возбуждения колебаний и снятия акустической информации с выступающего конца стержня.

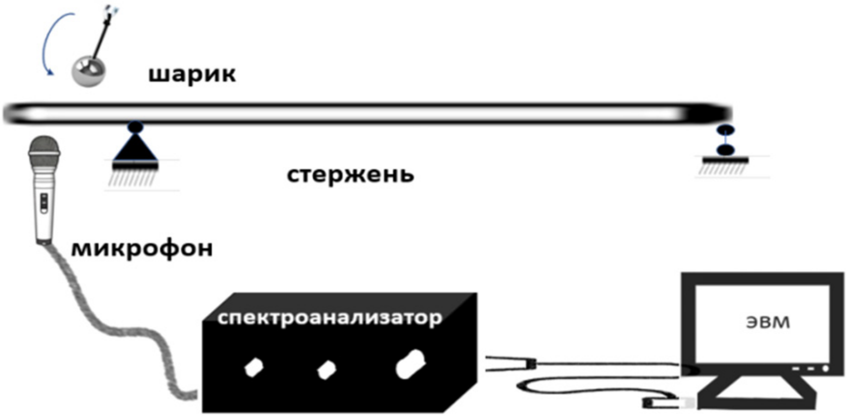


Рис. 4. Схема возбуждения и регистрации колебаний

Возбуждение колебаний осуществлялось ударным воздействием при помощи шарика, подвешенного на нити. Акустическое излучение регистрировалось измерительным микрофоном ZT 333-507, данные передавались на спектроанализатор ZET 032-500 и далее в ЭВМ. Обработка выполнялась с помощью программы «Узкополосный спектр» программного комплекса ZETLAB. Отметим, что при возбуждении и регистрации вибраций стержня через выступающий конец, регистрируемые экспериментальные частоты не отличались от тех, которые возбуждались и регистрировались во внутренней части стержня.

3. Обработка результатов. Сравнение с теоретической моделью

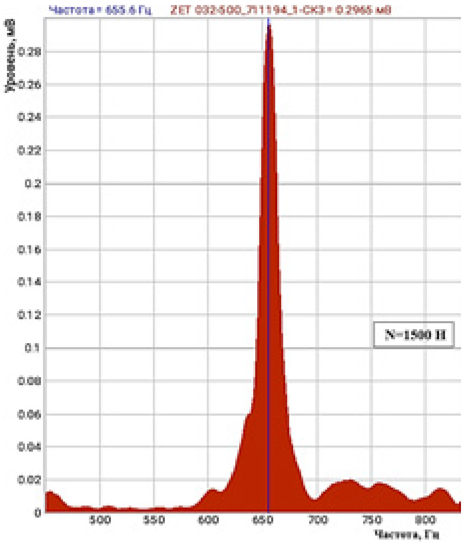


Рис. 5. Фрагмент АЧЗ в окрестности частоты 655 Гц

Из результатов измерений были выбраны значения собственных частот, полученные при обработке амплитудно-частотных зависимостей (АЧЗ) акустического сигнала при разных значениях растягивающей силы. На рис. 5 приведён фрагмент АЧЗ в диапазоне 500–800 Гц при продольной нагрузке 1500 Н. Виден сильный отклик на частоте 655 Гц, которому соответствует вторая частота теоретической модели.

В теоретическую модель были заложены коэффициенты жёсткости упругих закреплений стержня. Их определение производилось из условия совпадения второй частоты, наиболее очётливо выраженной в спектре, при среднем значении нагрузки. Найденные значения жёсткости использовались при расчёте остальных частот при нагрузках от 500 Н до 2500 Н с шагом 500 Н.

В табл. 1 представлены три пары экспериментальных и теоретических частот.

Таблица 1

N, кН	Частоты экспериментальные / теоретические, Гц		
	f_1	f_2	f_3
0.5	*/ 227.3	601.6 / 600.2	1232.8 / 1156.0
1	238.8 / 246.8	626 / 628.8	1223.6 / 1188.6
1.5	255.6 / 264.8	655.6 / 656.1	* / 1220.3
2	269.6 / 281.5	679 / 682.3	1284 / 1251.2
2.5	285.2 / 297.2	708.8 / 707.4	1320 / 1281.3

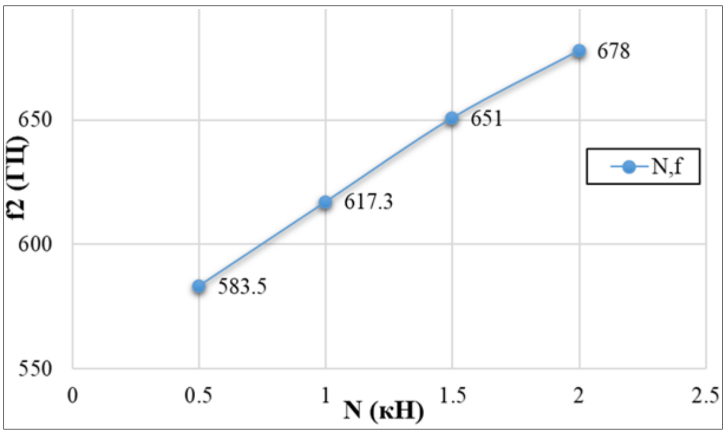


Рис. 6. Вторая экспериментальная частота колебаний как функция силы, приложенной к стержню

Видно, что отличия между экспериментальными и расчётными значениями частот укладываются в доли процента. В то же время отмечается заметная зависимость собственных частот от приложенного усилия. Зависимость второй частоты собственных колебаний стержня от продольного усилия показана на рис. 6.

На рис. 6 отчётливо видна зависимость частот колебаний от продольной силы. Результаты показывают также работоспособность предложенной простой теоретической модели.

Заключение

В работе продемонстрирована возможность неповреждающей диагностики продольного усилия в стержне, моделирующем арматурный элемент, без вскрытия канала, в котором находится основная часть стержня. Предложена простая теоретическая модель, адекватно описывающая зависимость частот собственных колебаний арматурного элемента от продольной силы.

Литература

1. *Казарян В. Ю.* Анкерное крепление для пролетного строения мостового сооружения // Мир дорог. – 2005. – вып. 17. – С. 37.
2. *Крутиков О. В., Гершуни И. Ш.* Определение усилий в канатах пролетного строения Ворошиловского моста в городе Ростов-на-Дону // Институт Гипростроймост. – 2015. – № 9. – С. 107–111.
3. ГОСТ 22362-77. Конструкции железобетонные. Методы измерения силы натяжения арматуры. – М. : Изд-во стандартов, 1988.
4. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. – М. : Высшая школа, 1980. – 408 с.

УДК 539.3

ПЕРЕДАЧА ТЕПЛА В МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ СРЕДАХ CGNI И CGNII

Ю. Н. Радаев, Е. В. Мурашкин

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы математического моделирования процессов теплопередачи в анизотропных микрополярных термоупругих средах CGNI и CGNII. Проводится сравнение двух моделей теплопроводности (первого и второго типов) для линейного анизотропного микрополярного связанного термоупругого тела. Выбираются подходящие параметры термодинамического состояния и квадратичные термодинамические потенциалы. Рассматриваются уравнения баланса энтропии и различные формы баланса внутренней и свободной энергии Гельмгольца. Найдены определяющие уравнения для анизотропных микрополярных термоупругих тел CGNI и CGNII. На протяжении всего изложения выполняется сравнение подходов к моделированию процессов теплопередачи первого и второго типов. Выводятся нелинейные уравнения теплопроводности, а также обсуждаются их линеаризованные формы.

Ключевые слова: теплопроводность, термоупругость, микрополярность, анизотропия, термодинамический потенциал, CGNI, CGNII.

1. Вводные замечания

Изучение термомеханических свойств современных конструкционных материалов и метаматериалов оказывается возможно в результате синтеза аппарата современной термодинамики и нано/микроструктурных представлений. Определяющие псевдоскаляры, характерные для целого ряда материалов, проявляющие гемитропные свойства, оказываются чувствительными к преобразованиям, изменяющим ориентацию пространства, в частности, к зеркальным отражениям и инверсиям. В общем анизотропном случае связанное термоупругое микрополярное тело CGNI/CGNII характеризуется 199-ю определяющими постоянными, что, несомненно, затрудняет аналитическое представление самих дифференциальных уравнений и исследование их решений.

Для описания состояния термодинамической системы используются термодинамические потенциалы состояния (внутренняя энергия и свободная энергия Гельмгольца), зависящие от базисных термодинамических переменных (параметров состояния). В представлениях квадратичных термодинамических потенциалов используются определяющие тензоры и псевдотензоры различных рангов и весов. Визуализация указанных тензоров и псевдотензоров как целостных символов достаточна сложна и приводится в работе [1], выступая при этом как неотъемлемый начальный этап математического моделирования.

Термомеханический подход к описанию процессов деформирования микрополярных материалов использовался, например, в работах [2, 3], где проводится построение определяющих уравнений для упругих микрополярных материалов в терминах абсолютных тензоров. Акронимы CGNI, CGNII используются в настоящей статье для обозначения теплопроводящих микрополярных тел, опирающиеся на классификацию предложенную в работе [2], а литера C отсылает к E. Cosserat & F. Cosserat [4].

Изложение настоящей работы в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты предыдущих статей [1, 5–7].

2. Уравнения баланса внутренней энергии и энтропии для микрополярных тел

Термодинамическая система, с точки зрения протекающих в ней процессов, характеризуется значениями ее параметров состояния, изменяющимися с течением времени. Параметрами состояния, образующими термодинамический базис, в случае микрополярного термоупругого тела CGNI/CGNII выступают:

- s — энтропия в расчете на единицу массы;
- $\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - e_{ijk}\phi^k$ — асимметричный тензор деформации;
- $\kappa_{i\cdot}^{\cdot j} = \nabla_i \phi^s$ — тензор изгиба–кручения.

Здесь ∇_i — символ ковариантного дифференцирования, e_{ijk} — тензор перестановок, u_j — вектор трансляционных перемещений, ϕ^k — спинвектор (вектор микроповоротов).

Физическую величину внутренней энергии u в расчете на единицу массы в механике континуума удобнее рассматривать как непрерывное физическое поле (physical field). Подлинный интерес представляет трактовка внутренней энергии как термодинамического потенциала состояния, т.е. как однозначной непрерывной функциональной зависимости от параметров состояния. Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния. Например $\overline{u}$ означает, что внутренняя энергия u рассматривается как термодинамический потенциал состояния

$$u = \overline{u}(s, \epsilon_{ij}, \kappa_{i\cdot}^{\cdot j}). \tag{1}$$

Фундаментальный утверждением (1) постулируется тождество физического количества внутренней энергии u (абсолютного скаляра, не зависящего от зеркальных отражений и инверсий трехмерного пространства) и значения функциональной зависимости $\overline{u}$.

Уравнение баланса внутренней энергии для микрополярных теорий, как хорошо известно, имеет следующий вид

$$\rho \underset{\bullet}{\partial} u = t^{ij} \underset{\bullet}{\partial} \epsilon_{ij} + \mu_{\cdot k}^{i\cdot} \underset{\bullet}{\partial} \kappa_{i\cdot}^{\cdot k} + \rho q - \nabla_i h^i. \tag{2}$$

Здесь $\underset{\bullet}{\partial}$ — производная по времени при фиксированных координатах x^k, t^{ik} — тензор силовых напряжений, ρ — массовая плотность, $\mu_{\cdot k}^{i\cdot}$ — тензор моментных напряжений, q — лучистое тепло, h^i — вектор потока тепла. В приближении малых деформаций мы считаем $\dot{a} = \underset{\bullet}{\partial} a$.

Уравнение баланса энтропии примем в конвенциональном виде

$$\rho \underset{\bullet}{\partial} s = -\nabla_j J^j + \rho\sigma + \rho\xi, \tag{3}$$

где J^j — вектор потока энтропии, ξ — неконтролируемое (внутреннее) производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы), σ — контролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы). Отметим, что ξ и σ являются абсолютными скалярами.

Термомеханический принцип необратимости гласит, что внутреннее производство энтропии не может быть отрицательным ни для какого термодинамически допустимого процесса, т. е. при отсутствии лучистого притока тепла не допускает стока энтропии:

$$\xi \geq 0. \tag{4}$$

3. Приведенное уравнение баланса свободной энергии Гельмгольца

В термомеханике широко используется еще одни термодинамический потенциал — свободная энергия Гельмгольца, определяющаяся с помощью преобразования Лежандра внутренней энергии. Для микрополярного тела CGNI свободная энергия Гельмгольца

$$\psi = \overline{\psi}(\theta, \epsilon_{ij}, \kappa_{i\cdot}^{\cdot s}). \tag{5}$$

где θ — абсолютная термодинамическая температура.

Свободная энергия Гельмгольца (в расчете на единицу массы) в случае микрополярного тела CGNII выступает как термодинамический потенциал состояния следующего вида:

$$\psi = \overline{\psi}(\underset{\bullet}{\partial}\vartheta, \nabla_i \vartheta, \epsilon_{is}, \kappa_{i\cdot}^{\cdot s}), \tag{6}$$

где

$$\underset{\bullet}{\partial}\vartheta = \theta. \tag{7}$$

Уравнение баланса свободной энергии, справедливое для моделей теплопроводности CGNI/CGNII, можно получить подстановкой соотношений (3) и (5) в уравнение (2). В результате чего имеем

$$-\rho(\underset{\bullet}{\partial}\psi + s\,\underset{\bullet}{\partial}\theta) + t^{ij}\,\underset{\bullet}{\partial}\epsilon_{ij} + \mu_{\cdot k}^{i\cdot}\,\underset{\bullet}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot k} - J^j \nabla_j \theta + \nabla_j(\theta J^j - h^j) + \rho(q - \sigma\theta) = \rho\xi\theta, \tag{8}$$

Если предположить справедливость следующих равенств

$$\theta J^j = h^j, \quad \sigma\theta = q, \tag{9}$$

то уравнение баланса (8) преобразуется к приведенной форме

$$-\rho(\underset{\bullet}{\partial}\psi + s\,\underset{\bullet}{\partial}\theta) + t^{ij}\,\underset{\bullet}{\partial}\epsilon_{ij} + \mu_{\cdot k}^{i\cdot}\,\underset{\bullet}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot k} - \theta^{-1} h^j \nabla_j \theta = \rho\xi\theta, \tag{10}$$

справедливой как для моделей CGNI, так и для моделей CGNII.

С учетом приведенного уравнения баланса энергии (10) термодинамическое неравенство необратимости (4) примет вид:

CGNI	CGNII
$C\,\underset{\bullet}{\partial}\theta + A^{ij}\,\underset{\bullet}{\partial}\epsilon_{ij} + B_{\cdot k}^{i\cdot}\,\underset{\bullet}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot k} +$ $+\theta^{-1} h^j \nabla_j \theta = -\rho\xi\theta \le 0$	$C\,\underset{\bullet}{\partial}\theta + A^{is}\,\underset{\bullet}{\partial}\epsilon_{is} + B_{\cdot s}^{i\cdot}\,\underset{\bullet}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot s} +$ $+\rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\nabla_k\vartheta}\nabla_k\theta + \theta^{-1} h^i \nabla_i \theta = -\rho\theta\xi \le 0$

В данных выше формулах используются обозначения:

CGNI	CGNII
$A^{is} = \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{is}} - t^{is}$	$A^{ij} = \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{ij}} - t^{ij}$
$B_{\cdot s}^{i\cdot} = \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}} - \mu_{\cdot s}^{i\cdot}$	$B_{\cdot s}^{i\cdot} = \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}} - \mu_{\cdot s}^{i\cdot}$
$C = \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\theta} + \rho\overline{s}$	$C = \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial(\underset{\bullet}{\partial}\vartheta)} + \rho\overline{s}$

Отсюда немедленно следуют определяющие уравнения:

CGNI	CGNII
$t^{is} = \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{is}}$	$t^{ij} = \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{ij}}$
$\mu_{\cdot s}^{i\cdot} = \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}}$	$\mu_{\cdot s}^{i\cdot} = \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}}$
$\rho\overline{s} = -\rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\theta}$	$\rho\overline{s} = -\rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial(\underset{\bullet}{\partial}\vartheta)}$

Следовательно, внутреннее производство энтропии вычисляется в виде

CGNI	CGNII
$\rho\theta\xi = -\theta^{-1}h^j\nabla_j\theta$	$\rho\theta\xi = -\left(J^k + \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\nabla_k\vartheta}\right)\nabla_k\theta$

Отметим, что в случае модели CGNII внутреннее производство энтропии исчезает, если вектор потока энтропии задать следующим определяющим уравнением:

$$J^k = -\rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\nabla_k\vartheta}.$$

4. Анизотропные теплопроводящие микрополярные среды CGNI/CGNII

Линеаризованную свободную энергию для анизотропного микрополярного термоупругого континуума $\overline{\psi}$, можно принять в формах:

для тел типа CGNI:

$$2\rho\overline{\psi} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \underset{2}{H}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\kappa^{\cdot s}_{i\cdot}\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \underset{3}{H}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}\epsilon_{is}\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \underset{1}{G}^{is}\epsilon_{is}\theta + \underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\kappa^{\cdot s}_{i\cdot}\theta + F\theta^2; \tag{11}$$

для тел типа CGNII:

$$2\rho\overline{\psi} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \underset{2}{H}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\kappa^{\cdot s}_{i\cdot}\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \underset{3}{H}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}\epsilon_{is}\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \underset{1}{G}^{is}\epsilon_{is}\theta + \underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\kappa^{\cdot s}_{i\cdot}\theta + F\theta^2 + \theta_0^{-1}\Lambda^{is}\nabla_i\vartheta\nabla_s\vartheta. \tag{12}$$

Здесь $\underset{1}{H}^{islm}$, $\underset{2}{H}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}$, $\underset{3}{H}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}$, $\underset{1}{G}^{is}$, $\underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}$, F, Λ^{is} — определяющие тензоры микрополярного термоупругого континуума.

Определяющие уравнения с учетом (11) и (12) запишутся в виде:

CGNI	CGNII
$t^{is} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{lm} + \dfrac{1}{2}\underset{3}{H}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \dfrac{1}{2}\underset{1}{G}^{is}\theta$	$t^{is} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{lm} + \dfrac{1}{2}\underset{3}{H}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \dfrac{1}{2}\underset{1}{G}^{is}\theta$
$\mu^{i\cdot}_{\cdot s} = \underset{2}{H}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \dfrac{1}{2}\underset{3}{H}{}^{lmi\cdot}_{\cdots s}\epsilon_{lm} + \dfrac{1}{2}\underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\theta$	$\mu^{i\cdot}_{\cdot s} = \underset{2}{H}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \dfrac{1}{2}\underset{3}{H}{}^{lmi\cdot}_{\cdots s}\epsilon_{lm} + \dfrac{1}{2}\underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\theta$
$-2\rho\overline{s} = \underset{1}{G}^{is}\epsilon_{is} + \underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\kappa^{\cdot s}_{i\cdot} + 2F\theta$	$-2\rho\overline{s} = \underset{1}{G}^{is}\epsilon_{is} + \underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\kappa^{\cdot s}_{i\cdot} + 2F\theta$
$h^i = -\underset{3}{G}^{is}\nabla_s\theta$	$h^i = -\Lambda^{is}\nabla_s\vartheta$

5. Уравнение теплопроводности для микрополярных тел типа CGNI/II

На основании уравнения баланса энтропии (3) при учете определяющих уравнений нелинейное уравнение теплопроводности может быть представлено следующим образом:

CGNI	CGNII
$\rho\dfrac{\partial s}{\partial\epsilon_{ij}}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{ij} + \rho\dfrac{\partial s}{\partial\kappa^{\cdot k}_{i\cdot}}\overset{\cdot}{\partial}\kappa^{\cdot k}_{i\cdot} + \rho\dfrac{\partial s}{\partial\theta}\overset{\cdot}{\partial}\theta = -\nabla_j(\theta^{-1}h^j) + \theta^{-1}\rho q$	$\rho\dfrac{\partial s}{\partial\epsilon_{ij}}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{ij} + \rho\dfrac{\partial s}{\partial\kappa^{\cdot j}_{i\cdot}}\overset{\cdot}{\partial}\kappa^{\cdot j}_{i\cdot} + \rho\dfrac{\partial s}{\partial\theta}\overset{\cdot}{\partial}\theta + \rho\dfrac{\partial s}{\partial\nabla_k\vartheta}\nabla_k\theta = -\nabla_j(\theta^{-1}h^j) + \theta^{-1}\rho q$

Последние уравнения без труда линеаризуются, в результате чего для анизотропных тел получаем:

CGNI	CGNII
$\dfrac{1}{2}\underset{1}{G}^{is}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{ij} + \dfrac{1}{2}\underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\overset{\cdot}{\partial}\kappa^{\cdot k}_{i\cdot} + F\overset{\cdot}{\partial}\theta + \theta_0^{-1}\underset{3}{G}^{is}\nabla_i\nabla_s\theta + \theta_0^{-1}\rho q = 0$	$\dfrac{1}{2}\underset{1}{G}^{is}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{ij} + \dfrac{1}{2}\underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\overset{\cdot}{\partial}\kappa^{\cdot k}_{i\cdot} + F\overset{\cdot\cdot}{\partial}{}^2\vartheta + \theta_0^{-1}\Lambda^{is}\nabla_i\nabla_s\vartheta + \theta_0^{-1}\rho q = 0$

Учитывая, что $F = -\rho c / \theta_0$ «доминирующая» часть уравнения теплопроводности CGNII будет гиперболической, c — теплоемкость на единицу массы.

Для получения связанной системы дифференциальных уравнений термомеханики микрополярных сред CGNI/II уравнения теплопроводности следует дополнить уравнениями баланса (количества движения и момента количества движения):

$$
\begin{gathered}
\nabla_i t^{ik} = -\rho(f^k - \underset{\cdot\cdot}{\partial}^2 u^k), \\
\nabla_i \mu^{i\cdot}_{\cdot k} + e_{ksl} t^{[sl]} = -\rho(l_k - \Im \underset{\cdot\cdot}{\partial}^2 \phi_k),
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где f^k — массовые силы, l_k — массовые пары, $\Im$ — коэффициент микроинерции.

Заключение и выводы

В работе приводится сравнение двух моделей теплопроводности (первого и второго типов) для линейного анизотропного микрополярного связанного термоупругого тела. Получены замкнутые системы дифференциальных уравнений, составляющих математическую формулировку моделей в форме связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Рассмотрены уравнения баланса внутренней и свободной энергии Гельмгольца, а также уравнение баланса энтропии, из которого впоследствии находятся уравнения теплопроводности первого и второго типов.

2. В качестве основного термодинамического потенциала выбрана свободная энергия Гельмгольца, что позволяет наиболее просто получить определяющие уравнения микрополярной термоупругости первого и второго типов. Функциональными аргументами свободной энергии Гельмгольца для сред CGNI являются: асимметричный тензор малых деформаций, асимметричный тензор изгиба–кручения и термодинамическая температура. Набор функциональных аргументов свободной энергии Гельмгольца для сред CGNII отличается от CGNI тем, что в него входит дополнительный векторный аргумент — пространственный градиент температурного смещения.

3. Получены определяющие уравнения для анизотропных микрополярных связанных термоупругих тел CGNI/II.

4. Получены нелинейные уравнения теплопроводности, а также приведены их линеаризованные формы. Отмечено, что «доминирующая» часть уравнения теплопроводности CGNII является гиперболической.

Благодарности

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

Литература

1. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On algebraic tripleweights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 1. – P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274

2. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. – Изд-во Саратовского ун-та, 2009. – 328 с.

3. *Green A. E, Naghdi P. M.* Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. – 1993. – Vol. 31. – P. 189–208.

4. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Herman et Fils, Paris, 1909. – vi+226 p.

5. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства // Ученые записки Казанского университета. Се-

рия Физико-математические науки. – 2023. – Т. 165, № 4. – С. 389–403. DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403
6. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 58, No 9. – P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255
7. *Радаев Ю. Н.* Теплопроводность второго типа в линейных анизотропных термоупругих микрополярных средах // Известия РАН: Механика твердого тела. – 2024. – № 6. (В печати)

УДК 539.3

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ МАТЕРИАЛЕ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

М. Ю. Соколова, Е. М. Исаматова

Тульский государственный университет

Аннотация. В рамках модели гипоупругости рассматривается распространение звуковых волн в трансверсально-изотропном материале, в котором создано предварительное однородное напряженно-деформированное состояние. Полагается, что в начальном состоянии в среде созданы конечные деформации, что приводит к необходимости учета нелинейности при записи динамических уравнений. Динамические уравнения распространения упругих волн записаны относительно поля скоростей, связанных с распространением волны. Для плоских монохроматических волн получено выражение для акустического тензора, который оказывается зависимым от предварительных напряжений. Продемонстрировано влияние вида начальных напряжений на полярные диаграммы фазовых скоростей для волн, распространяющихся в плоскости изотропии материала.
Ключевые слова: упругие волны, гипоупругость, анизотропия, трансверсально-изотропный материал, плоскость изотропии, динамические уравнения, конечные деформации, начальные напряжения, плоские монохроматические волны, фазовые скорости.

Введение

Задача о распространении упругих (звуковых) волн является классической задачей динамики. В анизотропных материалах с симметрией свойств материала, присущей одной из кристаллографических систем, в одном направлении распространяются три упругие волны: одна продольная (квазипродольная) и две поперечных (квазипоперечных) [1, 2]. Известно, что материалы, симметрия свойств которых относится к гексагональной кристаллографической системе, в отношении упругих свойств ведут себя как трансверсально-изотропный материал, характеризующийся наличием главной поворотной оси бесконечного порядка и перпендикулярной к ней плоскостью симметрии. При конечных деформациях такой материал можно рассматривать в рамках модели гипоупругости, в которой скорость изменения напряжений полагается пропорциональной тензору деформации скорости.

В работах [3–6] рассматриваются волны в гипоупругих изотропных материалах. Авторы этих работ подчеркивают, что использование модели гипоупругости позволяет учитывать влияние начальных напряжений на основные характеристики распространения звуковых волн. Задача о распространении звуковых волн в гипоупругих анизотропных материалах рассмотрена в работах [7, 8]. В данной статье получены динамические уравнения распространения упругих волн, записанные относительно поля скоростей, вызываемого волной. В рамках теории наложения малых деформаций на конечные уравнения линеаризованы в предположении, что при распространении упругих волн скорости и их градиенты малы. Получено обобщение уравнения Кристоффеля на случай распространения плоских волн в гипоупругих материалах с начальными напряжениями. На основе построенной модели проведен анализ влияния начальных напряжений на фазовые скорости распространения плоских волн в трансверсально-изотропном материале. Получены аналитические выражения для фазовых скоростей распространения волн в плоскости изотропии и построены их полярные диаграммы при начальных напряжениях различных видов.

1. Основные уравнения модели

Рассмотрим трансверсально-изотропный гипоупругий материал, в котором скорость изменения напряжений пропорциональна тензору деформации скорости. Будем считать, что появление начальных напряжений связано с однородными конечными деформациями среды, задаваемыми аффинором деформаций $\mathbf{\Phi}(t)$. В качестве меры напряженного состояния используем обобщенный тензор напряжений $\mathbf{\Sigma}$, связанный с тензором истинных напряжений Коши $\mathbf{S}$ соотношением:

$$\mathbf{\Sigma} = J\mathbf{S}, \tag{1}$$

где $J = \det \mathbf{\Phi}$ — относительное изменение объема, связанное с плотностью материала выражением $J = \rho_0 / \rho$.

В модели в качестве меры скорости изменения напряжений используем яуманновскую производную тензора $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{\Sigma}^{\nabla} = \dot{\mathbf{\Sigma}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{\Sigma} - \mathbf{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где $\dot{\mathbf{\Sigma}} = \dfrac{d\mathbf{\Sigma}}{dt}$ — полная производная тензора напряжений по времени, $\boldsymbol{\omega}$ — тензор вихря.

Тензор деформации скорости $\mathbf{W}$ и тензор вихря $\boldsymbol{\omega}$ выражаются через составляющие полярного разложения аффинора деформаций $\mathbf{\Phi} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$, $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$, $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, и их производные по времени известными соотношениями [9]:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R} + \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}.$$

Определяющие соотношения для гипоупругого материала записываются в виде [9]:

$$\mathbf{\Sigma}^{\nabla} = \mathbf{N} \cdot\cdot \mathbf{W}, \tag{4}$$

где $\mathbf{N} = N_{ijkl}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j\mathbf{a}_k\mathbf{a}_l$ — тензор упругих свойств среды, полусимметричный по парам индексов:

$$N_{ijkl} = N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}.$$

Компоненты тензора упругости определены относительно главных осей анизотропии материала с ортонормированным базисом $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ $(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij})$. В трансверсально-изотропном материале направим вектор $\mathbf{a}_3$ вдоль главной поворотной оси материала, а векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ будем считать расположенными в плоскости изотропии, перпендикулярной поворотной оси. Полагая, что компоненты тензора $\mathbf{N}$ в главных осях анизотропии постоянны в течение всего процесса деформирования, запишем тензор упругости трансверсально-изотропного материала в виде полиадного разложения [2, 9]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} = {} & C_{11}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\right) + C_{12}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\right) + \\
& + C_{13}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\right) + C_{33}\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 + \\
& + C_{44}\left(\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\right)\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\right) + \left(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_2\right)\left(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_2\right)\right) + \\
& + C_{66}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\right)\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где в соответствии с нотацией Фойгта введены обозначения $C_{11} = N_{1111} = N_{2222}$, $C_{12} = N_{1122}$, $C_{13} = N_{1133} = N_{2233}$, $C_{33} = N_{3333}$, $C_{14} = N_{1313} = N_{2323}$, $C_{66} = N_{1212} = \dfrac{1}{2}\left(C_{11} - C_{12}\right)$.

Пусть в гипоупругом трансверсально-изотропном материале к моменту времени t_1 создано однородное напряженно-деформированное состояние, которое характеризуется аффинором деформаций $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}(t_1)$ и тензором напряжений $\mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{\Sigma}(t_1)$. Это состояние назовем начальным. Дальнейшее деформирование вызывается звуковой волной, приводящей к возмущению поля перемещений: $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_1,t)=\mathbf{v}(\mathbf{x}_1,t)\delta t,$ где $\mathbf{x}_1$ — радиус-векторы частиц среды в момент времени $t_1,$ $\mathbf{v}(\mathbf{x}_1,t)$ — поле скоростей частиц среды, связанное с прохождением волны. В дальнейшем полагаем, что возмущения перемещений и их градиенты малы, что позволяет провести линеаризацию динамических уравнений. Как показано в работах [7, 8], при использовании определяющих соотношений в форме (4) удобно записать динамические уравнения относительно поля скоростей. Линеаризованные относительно начального состояния уравнения движения имеют вид [7, 8]:

$$\nabla_1\cdot J_1\dot{\mathbf{S}}=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}, \tag{6}$$

где $\nabla_1()=\dfrac{\partial()}{\partial\mathbf{x}_1}$ — набла-оператор начального состояния.

С учетом связи между обобщенным тензором истинных напряжений и тензором напряжений Коши (1), уравнения (6) принимают вид:

$$\nabla_1\cdot\dot{\mathbf{\Sigma}}-\mathbf{\Sigma}_1\cdot\nabla_1(\nabla_1\cdot\mathbf{v})=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}. \tag{7}$$

Подставляя в уравнения (7) определяющие соотношения (4), а также выражения для тензоров $\mathbf{W}$ и $\boldsymbol{\omega}$ через поле скоростей

$$\mathbf{W}=\frac{1}{2}\left(\nabla_1\mathbf{v}+\mathbf{v}\nabla_1\right),\quad \boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\left(\nabla_1\mathbf{v}-\mathbf{v}\nabla_1\right),$$

запишем динамические уравнения в виде:

$$\mathbf{N}\cdots\nabla_1\nabla_1\mathbf{v}+\frac{1}{2}\left(\mathbf{\Sigma}_1\cdot\cdot\nabla_1\nabla_1\mathbf{v}-\nabla_1\mathbf{v}\nabla_1\cdot\cdot\mathbf{\Sigma}_1\right)-\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}_1\cdot(\nabla_1\cdot\nabla_1\mathbf{v}+\nabla_1\nabla_1\cdot\mathbf{v})=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Уравнения (8) являются дифференциальными уравнениями второго порядка относительно поля скоростей, связанного с распространением звуковых волн в гипоупругом материале при действии в нем начальных напряжений $\mathbf{\Sigma}_1$.

2. Распространение плоских волн

Пусть в трансверсально-изотропном материале распространяется плоская монохроматическая волна с полем скоростей, определяемым выражением:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_1,\tau)=A\mathbf{p}\exp\left(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1-\omega\tau)\right), \tag{9}$$

где A — амплитуда скорости,

$\mathbf{p}$ — вектор поляризации $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=1),$

$\mathbf{k}=k\mathbf{n}$ — волновой вектор, k — волновое число, $\mathbf{n}$ — вектор волновой нормали $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1),$

ω — круговая частота, $\tau=t-t_1>0$ — время.

В этом случае уравнения (8) принимают вид

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{n},\mathbf{\Sigma}_1\right)\cdot\mathbf{p}=\rho_0c^2\mathbf{p}, \tag{10}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{n},\mathbf{\Sigma}_1)$ — акустический тензор,

$c=\dfrac{\omega}{k}$ — фазовая скорость распространения волны.

Входящий в уравнения (10) акустический тензор имеет вид

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{n},\mathbf{\Sigma}_1\right)=\mathbf{M}+\frac{1}{2}\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Sigma}_1\cdot\mathbf{n}\mathbf{E}-\mathbf{\Sigma}_1\right)-\frac{1}{2}\left(\mathbf{\Sigma}_1\cdot\mathbf{nn}+\mathbf{nn}\cdot\mathbf{\Sigma}_1\right), \tag{11}$$

где $\mathbf{M}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}$ — тензор Кристоффеля [2],

$\mathbf{E}=\delta_{ij}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$ — единичный тензор.

Выражение (11) показывает, что в рассматриваемой модели акустический тензор определяется упругими свойствами среды $\mathbf{N}$ и зависит не только от направления распространения волны $\mathbf{n}$, но и от действующих в начальном состоянии напряжений $\mathbf{\Sigma}_1$. Из уравнений (10) векторы поляризации $\mathbf{p}$ и фазовые скорости распространения волн с находятся как собственные векторы и собственные значения акустического тензора и, следовательно, зависят от начальных напряжений, действующих в материале. Рассмотрим, как влияет вид напряженного состояния в начальном состоянии на угловые зависимости фазовых скоростей распространения волн в трансверсально-изотропном материале.

3. Результаты численного исследования

Пусть волна распространяется в плоскости изотропии материала, тогда вектор волновой нормали $\mathbf{n}_1 = \cos\varphi\,\mathbf{a}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{a}_2$, где φ — угол, отсчитываемый от вектора $\mathbf{a}_1$. В этом случае тензор Кристоффеля имеет вид

$$\begin{gathered}\mathbf{M} = (C_{11}\cos^2\varphi + C_{66}\sin^2\varphi)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + (C_{11}\sin^2\varphi + C_{66}\cos^2\varphi)\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \\ + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{66})\sin 2\varphi\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\right) + C_{44}\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3.\end{gathered} \tag{12}$$

Пусть в начальном состоянии напряжения определяются тензором $\mathbf{\Sigma}_1 = \sigma(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2)$. Учитывая выражения (11) и (12), найдем акустический тензор:

$$\begin{gathered}\mathbf{A} = \Big(\big(C_{11} - \sigma\big)\cos^2\varphi + C_{66}\sin^2\varphi\Big)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \Big(\big(C_{11} - \sigma\big)\sin^2\varphi + C_{66}\cos^2\varphi\Big)\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \\ + \Big(\big(C_{12} + C_{66} - \sigma\big)\sin\varphi\cdot\cos\varphi\Big)\big(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\big) + \big(C_{44} + 0{,}5\sigma\big)\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3.\end{gathered} \tag{13}$$

При распространении волн в этой плоскости возникают: продольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(1)} = \cos\varphi\,\mathbf{a}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{a}_2$ и фазовой скоростью

$$c_1 = \sqrt{\frac{C_{11} - \sigma}{\rho}};$$

поперечная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(2)} = -\sin\varphi\,\mathbf{a}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{a}_2$ и фазовой скоростью

$$c_2 = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}};$$

поперечная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(3)} = \mathbf{a}_3$ и фазовой скоростью $c_3 = \sqrt{\dfrac{C_{44} + 0{,}5\sigma}{\rho}}$.

Таким образом, если вектор волновой нормали лежит в плоскости изотропии материала, то при действии напряжений $\mathbf{\Sigma}_1 = \sigma(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2)$ фазовые скорости распространения продольной и поперечных волн не зависят от угла φ, поэтому полярные диаграммы фазовых скоростей являются окружностями (рис.1). В тоже время, фазовые скорости c_1 и c_3 зависят от величины σ действующих напряжений, поэтому на рис. 1 их графики, построенные при $\sigma = 500$ МПа и обозначенные сплошной линией, не совпадают с графиками, построенными при $\sigma = 0$ МПа и обозначенными точками. При действии в плоскости $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ растягивающих напряжений скорость распространения продольной волны c_1 уменьшается, а скорость распространения поперечной волны c_3 увеличивается.

Пусть в начальном состоянии напряжения определяются тензором $\mathbf{\Sigma}_1 = \sigma(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1)$. В этом случае акустический тензор принимает вид:

$$\begin{gathered}\mathbf{A} = \big(C_{11}\cos^2\varphi + C_{66}\sin^2\varphi\big)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \big(C_{11}\sin^2\varphi + C_{66}\cos^2\varphi\big)\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \\ + \left(\frac{1}{2}\big(C_{12} + C_{66}\big)\sin 2\varphi - \sigma\right)\big(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\big) + \left(C_{44} + \frac{1}{2}\sigma\sin 2\varphi\right)\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3.\end{gathered} \tag{14}$$

В рассматриваемой плоскости распространяются: квазипродольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(1)}$ и фазовой скоростью

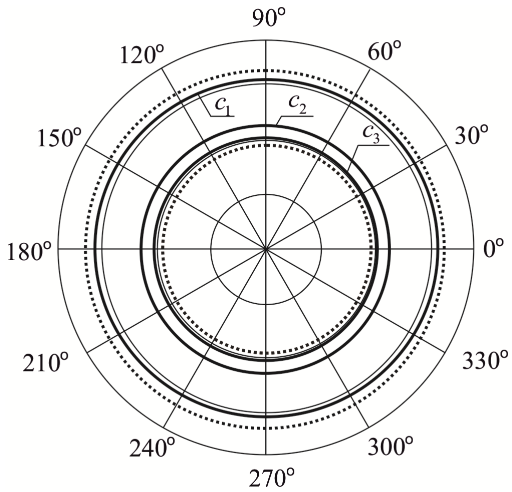


Рис. 1. Полярные диаграммы скоростей распространения продольных и поперечных волн в плоскости изотропии при действии напряжений $\mathbf{\Sigma}_1 = \sigma(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2)$

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{C_{11}+C_{66}}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_{11}-C_{66}}{2}\right)^2 - 2\sigma\frac{C_{11}-C_{66}}{2}\sin 2\varphi + \sigma^2}\right)};$$

квазипоперечная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(2)}$ и фазовой скоростью

$$c_2 = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{C_{11}+C_{66}}{2} - \sqrt{\left(\frac{C_{11}-C_{66}}{2}\right)^2 - 2\sigma\frac{C_{11}-C_{66}}{2}\sin 2\varphi + \sigma^2}\right)};$$

а также поперечная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(3)} = \mathbf{a}_3$ и фазовой скоростью

$$c_3 = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(C_{44} + \frac{1}{2}\sigma\sin 2\varphi\right)}.$$

При действии в плоскости изотропии касательных напряжений вектор поляризации $\mathbf{p}_{(1)}$ в общем случае не совпадает с направлением волновой нормали, поэтому такая волна является квазипродольной. Вектор $\mathbf{p}_{(2)}$ не перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$, поэтому такая волна оказывается квазипоперечной. В этом случае фазовые скорости распространения волн c_1, c_2, c_3 зависят от угла φ, поэтому изменяется форма полярных диаграмм, построенных для этих величин при $\sigma \neq 0$ (рис. 2).

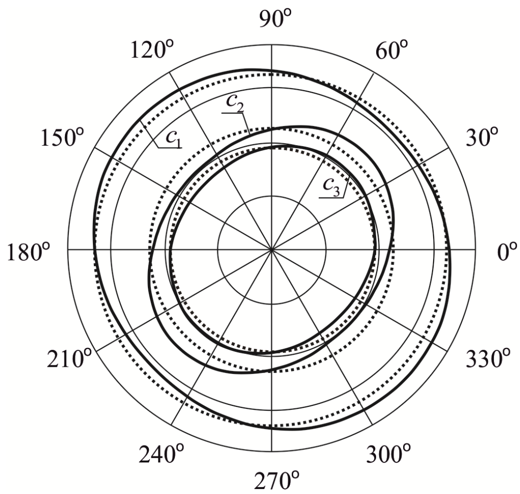


Рис. 2. Полярные диаграммы скоростей распространения продольных и поперечных волн в плоскости изотропии при действии напряжений $\mathbf{\Sigma}_1 = \sigma(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1)$

Заключение

Предложенная модель распространения волн в гипоупругих материалах при действии начальных однородных напряжений отражает зависимость скоростей распространений звуковых волн как от вида действующих напряжений, так и от их величины. Фазовые скорости распространения продольных волн при действии растягивающих напряжений уменьшаются, а для поперечных волн — увеличиваются. При действии касательных напряжений этот эффект проявляется в главных осях тензора напряжений, наибольшие изменения фазовых скоростей наблюдаются для углов $\varphi = 45°,\ 135°,\ 225°,\ 315°$.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Литература

1. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах / Ф. И. Федоров. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. – 383 с.
2. *Сиротин Ю. И.* Основы кристаллофизики / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 640 с.
3. *Rushchitsky J. J.* Nonlinear plane waves in hypoelastic materials / J. J. Rushchitsky // Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics. – 2014. – Cham : Springer. doi:10.1007/978-3-319-00464-8_8
4. *Rushchitsky J. J.* On the types and number of plane waves in hypoelastic materials / J. J. Rushchitsky // International Applied Mechanics. – 2005. – V. 41, № 11. – P. 1288–1298. doi:10.1007/s10778-006-0035-x
5. *Demidov V. N.* Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses / V. N. Demidov // Key Engineering Materials. – 2016. – V. 712. – P. 384–389. doi:10.4028/www.scientific.net/kem.712.384
6. *Демидов В. Н.* О расщеплении волн сдвига в изотропных гипоупругих материалах / В. Н. Демидов // Физическая мезомеханика. – 2000. – Т. 3, № 2. – С. 15–36.
7. *Markin A. A.* Dynamic equations for the propagation of acoustic waves in pre-deformed materials / A. A. Markin, M. Yu. Sokolova // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, № 2. – P. 679–688. doi: 10.1134/S0025654423601350
8. *Соколова М. Ю.* Акустические волны в гипоупругих телах. II. Анизотропные материалы / М. Ю. Соколова, Д. В. Христич // Чебышевский сборник. – 2024. – Т. 25, В. 2. – С. 334-349. doi: 10.22405/2226-8383-2024-25-2-334-349
9. *Маркин А. А.* Термомеханика упругопластического деформирования / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 320 с.

УДК 53.096

АНАЛИЗ ТЕРМОМЕХАНИКИ ФОТОПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ПРИМЕРЕ ENVISIONTEC SI500

В. И. Струкова, Ю. О. Носов, А. А. Каменских

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Аннотация. В рамках работы на основе данных открытых источников построена термомеханическая модель поведения фотополимерного материала Envisiontec SI500 на основе рядов Prony. Для математического описания поведения материала выбрана термовязкоупругая модель. Материальные константы модели Prony полученные с использованием численной процедуры идентификации с учетом температурно-временной аналогии и многопарамтерической оптимизации на основе данных об изменении модуля свободного сжатия, коэффициента Пуассона и модуля объемного сжатия от температуры. Выполнена верификация описанных определяющих соотношений на имитационной модели, повторяющей эмпирическое исследование. Проведен анализ термомеханического поведения материала Envisiontec SI500 в условия свободного и стесненного расширения цилиндрических образцов.

Ключевые слова: фотополимер, температура, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модель Prony, термомеханика, эксперимент, процедура идентификации.

Введение

Аддитивные технологии на настоящий момент являются флагманом для развития технологических процессов производства машиностроительной отрасли [1, 2]. Создание элементов конструкций, оснастки, специализированных объектов для получения сложных структур с использованием 3D-печати актуально и находит подтверждение в разных сферах науки и техники. Фотополимерные смолы посредством отверждения при аддитивной печати позволяют получить структуры сложной геометрии, в том числе с различными каналами, что может найти применение в технологии литейного производства [3, 4]. Сфера применения фотополимерных материалов обширная: биомедицина, хирургия, оптика, машиностроение, ювелирное дело и многое другое. Фотополимерные материалы часто удаляются разными технологиями для получения нужного вида геометрии детали (изделия). При этом исследователями отмечено, что термическое расширение фотополимеров может привести к снижению процента изделий без брака [4]. Для рационализации технологических процессов требуется анализ термомеханики материалов и построение численных аналогов материала в рамках компьютерного инжиниринга [5]. В работе рассмотрена задача об описании термомеханичесокго поведения фотополимерного материала, на примере Envisiontec SI500, на основе экспериментальных исследований, представленных в открытых источниках. Для описания поведения материала выбрана модель вязкоупругого поведения на основе рядов Prony, которая нашла широкое применение в прикладных пакетах конечно-элементного анализа. Реализация задачи выполнена на языке APDL в ANSYS Mechanical с использованием итерационных алгоритмов идентификации на основе Python.

1. Модель поведения фотополимерного материала Envisiontec SI500

Экспериментальные исследования Envisiontec SI500 выполнены согласно методике представленной в [6] на базе лаборатории пластмасс ПНИПУ д.т.н. Сметанниковым О. Ю., к.т.н. Субботин Е. В., Самусевым И. В. [7, 8]. Схема эксперимента включала деформирование цилиндрических образцов постоянной нагрузкой с изменением температуры от 20 до 150 °C с регистрацией кривых изменения механических характеристик материалов [8]. Данные кривые легли в основу для определения вязкоупругого поведения материала на основе рядов Prony [10]. Схема процедуры определения параметров рядов Prony приведена на рис. 1.

Рис. 1. Схема определения термомеханической модели поведения материала

По результатам экспериментальных исследований были построены зависимости модуля свободного сжатия, коэффициента Пуассона и модуля объемного сжатия от температуры в диапазоне от 0 до 100 °C (рис. 2) [7, 8].

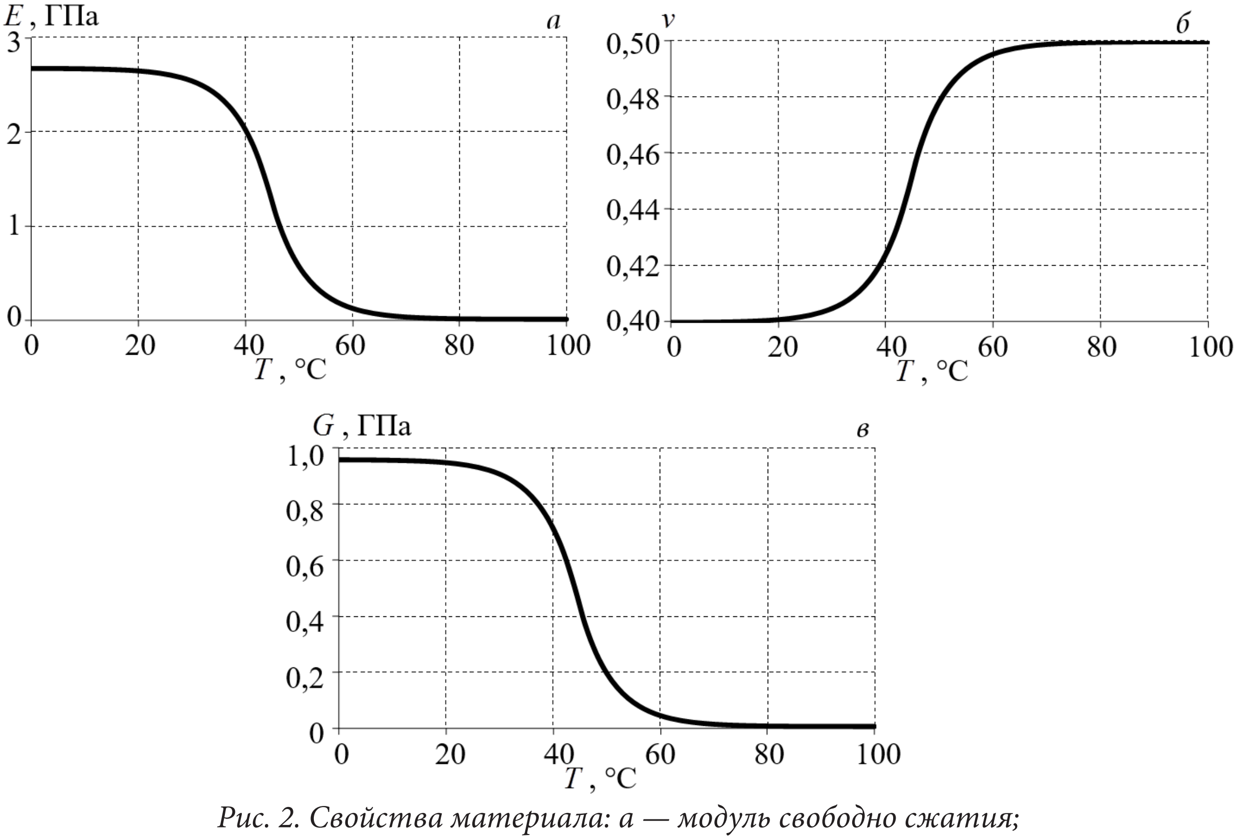


Рис. 2. Свойства материала: а — модуль свободно сжатия; б — коэффициент Пуассона; в — модуль объемного сжатия

Для построения модели поведения фотополимера в рамках термовязкоупругости использована процедура численной идентификации [9], ранее подтвердившая свою функциональность при описании смазочных и полимерных материалов [10].

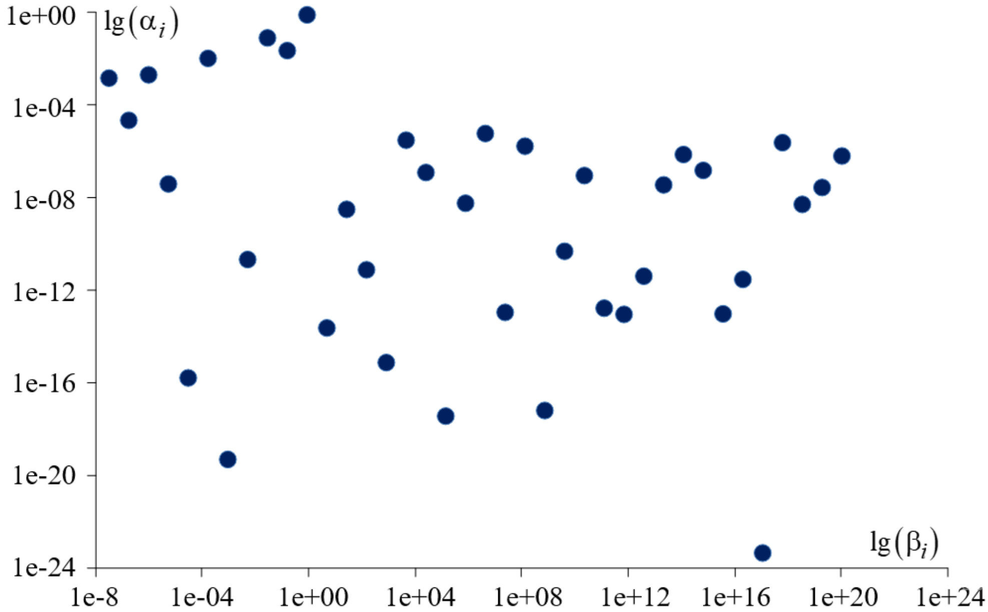


Рис. 3. Параметры ряда Prony (описание модели поведения материала)

Для верификации математической модели с экспериментом построена имитационная модель, повторяющая условия эмпирического исследования. При погрешности менее 5 % итерационной процедуры идентификации свойств материала с учетом многопараметрической оптимизации получено удовлетворительное совпадение результатов натурного и численного эксперимента.

2. Численный анализ термомеханического поведения фотополимерного материала

Для анализа влияния температуры на поведение образцов из Envisiontec SI500 реализованы тестовые задачи (рис. 4), которые рассматривают термическое расширение образца при нагреве от комнатной температуры до $T = 150$ °C с разной скоростью нагрева $\dot{T} = 1; 2; 5; 10; 16$ °C/мин.

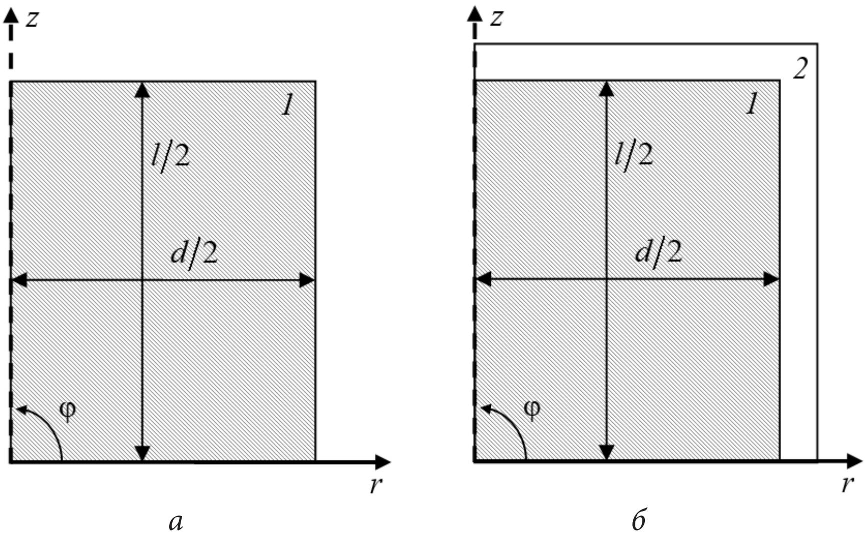


Рис. 4. Расчетные схемы вычислительных экспериментов:
а — свободное расширение; б — стесненное расширение; 1 — фотополимер; 2 — керамика

Задача рассматривает свободное и стесненное расширение фотополимера в осесимметричной постановке. При реализации стесненного расширения цилиндрический образец из фотополимерного материала помещается в керамическую оболочку. Исследовано влияние толщины керамической оболочки на деформационное поведение системы. Проанализировано поведение фотополимера при учете жесткой керамической формы и влияние деформирования образца на керамическую форму.

Заключение

В рамках работы построена модель поведения фотополимерного материала Envisiontec SI500 полученного в рамках аддитивных технологий на основе теории вязкоупругости. Выполнена верификация полученных определяющих соотношений на имитационной модели, повторяющей условия эмпирических исследований. Выполнен анализ термомеханического поведения материала при свободном и сжатом термическом расширении.

Развитие работы предполагается в нескольких направлениях:

1. Материал Envisiontec SI500 имеет много современных отечественных и иностранных аналогов (HARZ Labs Jewelry J-Cast, Gorky Liquid Castable LCD, IFUN Jewelry Casting Resin и т. д.). Для построения нелинейных моделей поведения материалов требуется проведение серии экспериментальных исследований, так как данные производителей и открытых источников ограничены.

2. Моделирование термического расширения материалов с учетом ячеистых структур по технологии от простого к сложному: эффективные характеристики, модели пористых сред, моделирование геометрии структур и т.д.

Материалы получены в рамках программы развития передовой инженерной школы «Высшая школа авиационного двигателестроения» ПНИПУ г. Пермь (федеральный проект «Передовые инженерные школы»).

Литература

1. *Токарев С. П.* Исследование экономических преимуществ и вызовов внедрения аддитивных технологий в современное производство / С. П. Токарев // Вопросы природопользования. – 2024. – Т. 3, № 1. – С. 64–73.

2. *Бирюков Ю. А.* Барьеры, препятствующие развитию аддитивных технологий / Ю. А. Бирюков, Д. Е. Кардаш // Строительные и дорожные машины. – 2023. – № 5. – С. 48–52.

3. *Huang Y. M.* Numerical analysis of a mask type stereolithography process using a dynamic finite-element method / Y. M. Huang, C. P. Jiang // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2003. – Vol. 21. – P. 649–655.

4. Проектирование CAD-моделей для расчета значений термического напряжения / Н. В. Трапезников, А. А. Шумков, Е. В. Матыгуллина, Т. Р. Абляз // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. – 2018. – Т. 20, № 2. – С. 55–61.

5. *Huang Y.-M.* CAD/CAE/CAM integration for increasing the accuracy of mask rapid prototyping system / Y.-M. Huang, H.-Y. Lan // Computers in Industry. – 2005. – Vol. 56. – P. 442–456.

6. *Сметанников О. Ю.* Экспериментальная идентификация модели термомеханического поведения стеклующихся полимеров / О. Ю. Сметанников, Н. А. Труфанов // Вестник удмуртского университета. Механика. – 2009. – Вып.4. – С.133–145.

7. *Сметанников О. Ю.* Экспериментальная идентификация параметров определяющих соотношений для фотополимерного композита / О. Ю. Сметанников, И. В. Самусев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 105–116.

8. *Шумков А. А.* Разработка технологии выжигаемых фотополимерных моделей для отливок сложного профиля: специальность 05.16.04 «Литейное производство»: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Шумков Алексей Александрович, 2019. – 148 с.

9. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023618695 Российская Федерация. Идентификация математической модели вязкоупругого поведения тела Максвелла на основе рядов Прони: № 2023617843: заявл. 27.04.2023: опубл. 27.04.2023 / А. А. Каменских, Ю. О. Носов; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

10. *Nosov Y. O.* Experimental study of the rheology of grease by the example of CIATIM-221 and identification of its behavior Model / Y. O. Nosov, A. A. Kamenskikh // Lubricants. – 2023. – Vol. 11. – Art. 295.

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ЗАДАЧАХ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ

А. И. Сумин[1], А. Л. Фролов[1], Р. С. Сумина[1], О. А. Фролова[2]

[1]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»
[2]Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются вопросы потери устойчивости нелинейных сред дифференциального типа по отношению к конечным возмущениям в применении к задачам, возникающим в гидрометеорологии. Используя теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевое решение системы будет асимптотически устойчиво в некоторой области начальных возмущений амплитуд наложенных перемещений, температур, градиентов температур и их скоростей.
Ключевые слова: устойчивость, нелинейная вязкоупругая среда, конечные возмущения, принцип усреднения.

Рассмотрим нелинейно-вязкоупругую среду дифференциального типа сложности 1, иллюстрацией которой может служить среда рассматриваемая в гидрометеорологии. Для такого тела напряжения и тепловой поток определяются через функцию свободной энергии Ψ и диссипативный потенциал Φ по формулам [1]

$$S=\frac{\partial\Psi}{\partial E}+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{E}},\qquad \eta=\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\theta}},\qquad \frac{1}{\rho_R\theta}h_R=-\frac{\partial\Phi}{\partial g_R},\tag{1}$$

где

$$\Psi=\Psi\left(E_{ij},\theta\right),\qquad \Phi=\Phi\left(E_{ij},\theta,g_{Ri}\right).\tag{2}$$

Возьмем эти функции в виде [2]

$$\Psi=\frac{1}{2}C^{(E)}_{klmn}E_{kl}E_{mn}+\frac{1}{2}C^{(\theta)}\theta^2+C^{(E\theta)}_{kl}E_{kl}\theta\tag{3}$$

$$\Phi=\frac{1}{2}D^{(E)}_{klmn}\dot{E}_{kl}\dot{E}_{mn}+\frac{1}{2}D^{(\theta)}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}D^{(q)}_{kl}g_Rg_l+D^{(E\theta)}_{kl}\dot{E}_{kl}\dot{\theta}+D^{(Eq)}_{klm}\dot{E}_{kl}g_m+D^{(q\theta)}_{k}g_k\dot{\theta}.$$

Подставляя (3) в (1) получаем линейные определяющие соотношения для материала типа Кельвина — Фойхта

$$S_{kl}=C^{(E)}_{klmn}E_{mn}+C^{(E\theta)}_{kl}\theta+D^{(E\theta)}_{klmn}\dot{E}_{mn}+D^{(E\theta)}_{kl}\dot{\theta}+D^{(Eq)}_{klm}\dot{g}_m,\tag{4}$$

$$-\eta=C^{(E\theta)}_{kl}E_{kl}+C^{(\theta)}\theta+D^{(E\theta)}_{kl}\dot{E}_{kl}+D^{(q\theta)}_{k}g_k+D^{(\theta)}\dot{\theta},\tag{5}$$

$$\frac{1}{\rho_R\theta}=h_{Rm}=D^{(Eq)}_{klm}\dot{E}_{kl}+D^{(q)}_{mn}g_n+D^{(q\theta)}_{m}\dot{\theta}.\tag{6}$$

Для нелинейных соотношений перед скобками появляется скалярный множитель $\lambda\neq1$.

Рассмотрим возмущенное состояние, для которого компоненты тензора скоростей деформаций

$$2\dot{E}_{kl}=\dot{u}_{k,l}+\dot{u}_{l,k}.\tag{7}$$

Для возмущений компонент тензора деформаций получим

$$S_{kl}=C^{(E)}_{klmn}\left(E_{mn}(1)+E_{mn}(2)\right)+C^{(E\theta)}_{kl}\theta+D^{(E\theta)}_{klmn}\dot{E}_{mn}+D^{(E\theta)}_{kl}\dot{\theta}+D^{(Eq)}_{klm}\dot{g}_m,$$

$$-\eta = C_{kl}^{(E\theta)}\left[E_{kl}(1)+E_{kl}(2)\right]+C^{(\theta)}\theta + D_{kl}^{(E\theta)}\dot{E}_{kl}+D_{k}^{(q\theta)}g_k + D^{(\theta)}\dot{\theta}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\rho_R\theta} = h_{Rm} = D_{klm}^{(Eq)}\dot{E}_{kl}+D_{mn}^{(q)}g_n + D_m^{(q\theta)}\dot{\theta},$$

где

$$S_{kl} = S_{kl}(1)+S_{kl}(2), \tag{9}$$

$$S_{kl}(1) = C_{klmn}^{(E)}E_{mn}(1)+C_{kl}^{(E\theta)}\theta + D_{klmn}^{(E)}\dot{E}_{mn}+D_{kl}^{(E\theta)}\dot{\theta}+D_{klm}^{(Eq)}\dot{g}_m,$$

$$S_{kl}(2) = C_{klmn}^{(E)}(2).$$

Используя принцип возможных перемещений, получим [3]

$$\int_V \left[\left(\delta_{ik}+\overset{0}{u}_{i,k}\right)S_{kj}+\overset{0}{S}_{kj}\,u_{i,k}+S_{kj}u_{i,k}\right]\phi_{inm,j}dV+\int_V \ddot{u}_i\phi_{inm}dV = 0 \tag{10}$$

или

$$\int_V \left[\left(\delta_{ik}+\overset{0}{u}_{i,k}\right)\left[S_{kj}(1)+S_{kj}(2)\right]+\overset{0}{S}_{kj}\,u_{i,k}+\left[S_{kj}(1)+S_{kj}(2)\right]u_{i,k}\right] \tag{11}$$

$$\phi_{inm,j}dV+\int_V \ddot{u}_i\,\phi_{inm}dV = 0.$$

Зависимость (8) перепишем с учетом следующих обозначений

$$C_{klmn}^{(E)} = C_1,\quad C_{kl}^{(E\theta)} = C_2,\quad D_{klmn}^{(E)} = D_1,\quad D_{kl}^{(E\theta)} = D_2,\quad D_{klm}^{(Eq)} = D_3,\quad E_{mn}(1) = f^{(1)}E^{(1)},$$

$$E_{mn}(2) = f^{(1)}f^{(2)}E^{(12)},\quad g_m = g^{(1)}Q(X_k),$$

$$2E^{(1)} = \phi_{mij,n}+\phi_{nij,m}+\overset{0}{u}_{k,m}\,\phi_{kij,n}+\phi_{kij,m}\,\overset{0}{u}_{k,n},$$

$$2E^{(2)} = \phi_{rij,m}\phi_{rkl,n},$$

$$S(1) = C_1E^{(1)}f^{(1)}+C_2\theta^{(1)}\Psi^{(1)}+D_1\theta^{(1)}E^{(0)}+D_2\theta^{(1)}\Psi^{(1)}+D_3\,\dot{g}^{(1)}Q,$$

$$S(2) = C_1f^{(1)}f^{(2)}E^{(12)}.$$

Систему уравнений (10) перепишем так

$$\int_V \left\{\left(I+\overset{0}{H}+f^{(1)}H^{(1)}\right)\left(C_1E^{(1)}f^{(1)}+C_2\theta^{(1)}\Psi^{(1)}+D_1f^{(1)}E^{(01)}+D_2\,\dot{\theta}^{(1)}\,\Psi^{(1)}+D_3\,\dot{q}^{(1)}\,Q+C_1f^{(1)}f^{(2)}\,f^{(12)}\right)+\right.$$

$$\left.+\overset{0}{S}\,f^{(1)}\,H^{(1)}\right\}H^{(1)}dV+\int_V H^{(1)}H^{(1)T}dV = 0. \tag{12}$$

Введем коэффициенты

$$A = \int_V H^{(1)}H^{(1)T}dV,\quad B = \int_V\left(I+\overset{0}{H}\right)D_1E^{(0)}H^{(1)}dV,\quad C = \int_V\left(I+\overset{0}{H}\right)D_2\Psi^{(1)}H^{(1)}dV,$$

$$D = \int_V\left(I+\overset{0}{H}\right)D_3QH^{(1)}dV,\quad E = \int_V\left(I+\overset{0}{H}\right)C_2\Psi^{(1)}H^{(1)}dV,\quad K = \int_V C_1\left(H^{(1)}E^{(1)}+E^{(12)}\right)H^{(1)}dV,$$

$$K_1 = \int_V\left[\left(I+\overset{0}{H}\right)C_1E^{(1)}+\overset{0}{S}\,H^{(1)}\right]H^{(1)}dV,$$

$$K_2 = \int_V H^{(1)}C_2\Psi^{(1)}H^{(1)}dV,$$

$$K_3 = \int_V H^{(1)}D_1E^{(0)}H^{(1)}dV,$$

$$K_4=\int_V H^{(1)}D_2\Psi^{(1)}H^{(1)}dV,$$

$$K_5=\int_V H^{(1)}D_3QH^{(1)}dV.$$

Тогда система (11) запишется в виде

$$A\ddot{f}^{(1)}+B\dot{f}^{(1)}+C\dot{\theta}^{(1)}+D\dot{g}^{(1)}+E\theta^{(1)}+Kf^{(1)}+K_1f^{(1)}f^{(1)}+$$
$$+K_2f^{(1)}\theta^{(1)}+K_3f^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_4f^{(1)}\dot{\theta}^{(1)}+K_5f^{(1)}g^{(1)}=0. \tag{13}$$

В общем случае коэффициенты системы (13) переменные. Если принять допущение, что в начальном деформированном состоянии прошли все релаксационные процессы, то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Аналогичную систему можно получить, если предположить, что в основном состоянии тело подвергается моно и полигармоническому нагружению. Применяя принцип усреднения за период получим постоянные коэффициенты, причем для типичных вязкоупругих материалов погрешности такого представления не превосходят нескольких процентов [2, 3].

Умножим систему (13) справа на $\dot{f}^{(1)}$

$$A\ddot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+B\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+C\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+D\dot{g}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+E\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+Kf^{(1)}\dot{f}^{(1)}+$$
$$+K_1f^{(1)}f^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_2f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_3f^{(1)}\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_4f^{(1)}\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_5f^{(1)}g^{(1)}\dot{f}^{(1)}=0. \tag{14}$$

Перепишем (14) в виде

$$A\ddot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+Kf^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_1f^{(1)}f^{(1)}\dot{f}^{(1)}=-\Big[B\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+C\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+D\dot{g}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+E\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+$$
$$+K_2f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_3f^{(1)}f^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_4f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_5f^{(1)}g^{(1)}\dot{f}^{(1)}\Big]=0$$

Введем функции

$$\Pi=\frac{1}{2}A\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+\frac{1}{2}Kf^{(1)}f^{(1)}+\frac{1}{3}K_1f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}, \tag{15}$$

$$W=B\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+C\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+D\dot{g}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+E\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_2f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+$$
$$+K_3f^{(1)}f^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_4f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_5f^{(1)}g^{(1)}\dot{f}^{(1)}. \tag{16}$$

Если функции Π и W положительно определенные в некоторой области фазового пространства фазовых переменных $f^{(1)}$, $\dot{f}^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, $\dot{\theta}^{(1)}$, $g^{(1)}$ $\dot{g}^{(1)}$, то из системы (14) видно, что производная от положительно определенной функции Π в силу системы будет отрицательно определенной функцией — W и согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевое решение системы (14) будет асимптотически устойчиво в некоторой области начальных возмущений амплитуд наложенных перемещений, температур, градиентов температур и их скоростей. Таким образом, решение задачи об устойчивости невозмущенного состояния нелинейно-вязкоупругого тела Кельвина — Фойхта сводится к задаче устойчивости нулевого решения системы (14), которая решается при условии нахождения областей начальных возмущений и их скоростей. Значения начальных возмущений и их скоростей находятся из соотношений

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\dot{f}^{(1)}}\right)_0=0,\quad\left(\frac{\partial\Pi}{\partial f^{(1)}}\right)_0=0,\quad\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{\theta}^{(1)}}\right)_0=0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{g}^{(1)}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial g^{(1)}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{f}^{(1)}}\right)_0 = 0. \tag{17}$$

Подставляя (15) и (16) в (17), получим

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{f}^{(1)}}\right)_0 = A\dot{f}^{(1)}(0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial f^{(1)}}\right)_0 = Kf^{(1)}(0) + K_1 f^{(1)}(0) f^{(1)}(0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\theta}^{(1)}}\right)_0 = C\dot{f}^{(1)}(0) + K_4 f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \theta^{(1)}}\right)_0 = E\dot{f}^{(1)}(0) + K_2 f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0) = 0, \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{g}^{(1)}}\right)_0 = D\dot{f}^{(1)}(0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial g^{(1)}}\right)_0 = K_5 f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{f}^{(1)}}\right)_0 = 2B\dot{f}^{(1)}(0) + C\dot{\theta}^{(1)}(0) + D\dot{g}^{(1)}(0) + E\dot{\theta}^{(1)}(0) + K_2 f^{(1)}(0)\dot{\theta}^{(1)}(0) +$$

$$+2K_3 f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0) + K_4 f^{(1)}(0)\dot{\theta}^{(1)}(0) + K_5 f^{(1)}(0) g^{(1)}(0) = 0.$$

Соотношения (18) представляют собой систему алгебраических уравнений относительно величин начальных возмущений и их скоростей. Решение системы дает область начальных возмущений и их скоростей, в которых нулевое решение системы (14) будет устойчиво. Решение системы (18) дает счетное количество критических возмущений, которые образуют некоторую последовательность. Выбирая из этих значений минимальное, можно провести гиперсферу в фазовом пространстве переменных, внутри которой основной процесс деформирования, соответствующий нулевому решению системы (14) будет устойчив. Последовательность значений фазовых переменных в начальный момент времени, полученных из системы (18) образует конечную цепочку бифуркационных точек, из которых реализуется вначале минимальное. Отличие представленного подхода от линеаризированной теории в том, что нелинейно-вязкоупругое тело может потерять устойчивость при любой отличной от нуля величине начальных деформаций, если возмущения превысят определенный предел.

Литература

1. *Trusdell C., Noll W.* In "Handbuch der Phyzic" (Flugge S. ed.), Band 3, No. 3, Springer, Berlin, 1965.

2. *Карнаухов В. Г.* Термодинамика предварительно деформированных вязкоупругих тел / В. Г. Карнаухов, Б. П. Гуменюк. – Киев : Наук. думка, 1990. – 304 с.

3. *Спорыхин А. Н.* О новых явлениях в теории устойчивости нелинейных сред при конечных возмущениях / А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин. – Докл. АН УСССР, сер. А, № 8, 1982. – С. 46–49.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ

Е. А. Холоша

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе представлены соотношения для напряжений и деформаций, полученные в ходе решения задачи о пластине, подверженной локальному нагреву по прямой линии.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температура, упрочнение, напряжения, деформации, перемещения.

Введение

Процессу деформирования материалов (как обратимого, так и необратимого) посвящено, например [1–3], в которых рассматриваются модели с различными свойствами.

В работах [7, 8] найдено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии пластины, диска. В первом случае при двуосном растяжении, когда отверстие свободно от нагрузок. И во втором случае, когда материал находится под действием теплового источника, который помещен в центр диска.

Данная работа посвящена моделированию и исследованию деформирования упругопластической пластины. В последнее время со стороны исследователей значительно возрос интерес к нелинейным задачам механики твердого деформируемого тела, учитывающих все более сложные процессы. Такие задачи возникают в производстве, где широко используются материалы со сложными физико-механическими свойствами, также существует проблема моделирования технологических процессов. При этом нужно учитывать, что в элементах конструкций могут возникать конечные деформации, и решение задач такого рода осложняется тем, что материалы характеризуются различными физическими свойствами, такими как упругость, пластичность, вязкость. Поэтому создание эффективных методов исследования нелинейных процессов деформирования, применимых к более широкому классу задач, является актуальной задачей на сегодняшний день.

1. Постановка задачи

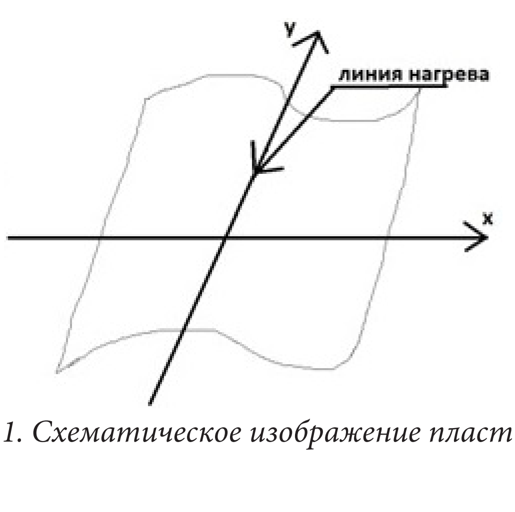


Рис. 1. Схематическое изображение пластины

Рассмотрим бесконечно длинную пластину шириной $2s$, которая представлена на рис. 1. Систему декартовых координат свяжем с краем пластины так, чтобы координаты изменялись в пределах $0 \le x \le 2s$; $-\infty < y < \infty$. С целью упрощения дальнейшего, будем считать, что локальный нагрев осуществляется по прямой линии $x = s$. Примем, что внешняя поверхность пластины свободна от усилий, массовые силы отсутствуют. Требуется определить напряженно-деформированное состояние тела.

2. Запись основных уравнений в декартовой системе координат

2.1. Упругая зона

Соотношения, связывающие полные и упругие деформации в упругой зоне имеют вид:

$$e_x = e_x{}^e, \quad e_y = e_y{}^e, \quad e_z = e_z{}^e, \tag{1}$$

где e_x, e_y, e_z — компоненты тензора полных деформаций; e_x^e, e_y^e, e_z^e — компоненты тензора упругих деформаций;

В упругой зоне полная система уравнений принимает вид:

– уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_y$ — компоненты тензора напряжений;

– соотношения закона Дюамеля — Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu e_x + \lambda(e_x + e_y + e_z) - 3K\alpha(T - T_0) \\ \sigma_y &= 2\mu e_y + \lambda(e_x + e_y + e_z) - 3K\alpha(T - T_0) \qquad , \\ \sigma_z &= 2\mu e_z + \lambda(e_x + e_y + e_z) - 3K\alpha(T - T_0) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

где постоянные λ и μ называют параметрами Ламе; α — коэффициент линейного температурного расширения; K — модуль всестороннего сжатия; T — температура (определяется из решения уравнения теплопроводности); T_0 — температура в начальный момент времени;

– соотношения Коши:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ e_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \\ e_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{aligned} \tag{4}$$

где u_i — компоненты вектора перемещений;

– граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y = P_x \\ \sigma_{yx} n_x + \sigma_y n_y = P_y \end{aligned}, \tag{5}$$

где n_j — направляющие косинусы; P_j — компоненты вектора внешней нагрузки на части поверхности, где заданы усилия;

$$\begin{aligned} u_x = u_x^* \\ u_y = u_y^* \end{aligned}, \tag{6}$$

где u_x^*, u_y^* — компоненты вектора перемещений на части поверхности, где заданы перемещения u_x, u_y.

2.2. Пластическая зона

Соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации в пластической зоне имеют вид:

$$e_x = e_x{}^e + e_x{}^p, e_y = e_y{}^e + e_y{}^p, e_z = e_z{}^e + e_z{}^p, \tag{7}$$

где e_x^p, e_y^p, e_z^p — компоненты тензора пластических деформаций;

– уравнения равновесия:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{gathered}; \tag{8}$$

– соотношения закона Дюамеля — Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu e_x^e + \lambda(e_x^e + e_y^e + e_z^e) - 3K\alpha(T - T_0) \\ \sigma_y &= 2\mu e_y^e + \lambda(e_x^e + e_y^e + e_z^e) - 3K\alpha(T - T_0) \\ \sigma_z &= 2\mu e_z^e + \lambda(e_x^e + e_y^e + e_z^e) - 3K\alpha(T - T_0) = 0 \end{aligned}; \tag{9}$$

– соотношения Коши:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ e_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right); \\ e_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{aligned} \tag{10}$$

– функция нагружения:

$$\max\left\{\left|\sigma_x - ce_x^p - \sigma\right|, \left|\sigma_y - ce_y^p - \sigma\right|, \left|\sigma_z - ce_z^p - \sigma\right|\right\} = \frac{4}{3}k, \tag{11}$$

где k — предел текучести, $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$;

– соотношения ассоциированного закона пластического течения:

$$\begin{aligned} de_x^p &= d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \\ de_{xy}^p &= d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}}, \\ de_y^p &= d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \end{aligned} \tag{12}$$

где $d\lambda$ — множитель Лагранжа; $f(\sigma_{ij})$ — определяется соотношением (11).

Граничные условия имеют вид в пластической зоне имеют аналогичный вид (5), (6).

На границе раздела зон упругого и пластического деформирования должны быть выполнены условия сопряжения

3. Решение в упругой области

Предположим, что в начальный момент времени пластина будет деформироваться обратимо. Если пренебречь торцевыми эффектами по длине пластины, то получим $e_y = 0$. Закон Дюамеля — Неймана описывает связь между главными напряжениями σ_x, σ_y, $\sigma_z = 0$ и упругими деформациями e_x^e, $e_y^e = 0$, e_z^e.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= e_x^e\left(\lambda+2\mu\right)+\lambda e_z^e-3K\alpha\left(T-T_o\right) \\ \sigma_y &= +\lambda(e_x^e+e_z^e)-3K\alpha\left(T-T_o\right) \\ \sigma_z &= e_z^e\left(\lambda+2\mu\right)+\lambda e_x^e-3K\alpha\left(T-T_o\right)=0 \end{aligned}, \qquad (13)$$

где $K=\lambda+\dfrac{2}{3}\mu$;

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{4\mu\left(\lambda+\mu\right)u_{x,x}-6\mu K\alpha\left(T-T_0\right)}{\lambda+2\mu} \\ \sigma_y &= \frac{2\mu\lambda u_{x,x}-6\mu K\alpha\left(T-T_0\right)}{\lambda+2\mu} \end{aligned}. \qquad (14)$$

В рассматриваемой задаче уравнение равновесия примет вид:

$$\sigma_{x,x}=0. \qquad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что

$$\sigma_x=C_1, \qquad (16)$$

где C_1 — константа интегрирования, которая находится из граничных условий.

В качестве граничных условий примем:

$$\begin{aligned} \sigma_x\big|_{x=0} &= 0 \\ u_x\big|_{x=0} &= 0 \end{aligned}. \qquad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что $\sigma_x=0$. Тогда единственное нетривиальное напряжение запишется в виде:

$$\sigma_y=\frac{3\mu K\alpha\left(T-T_0\right)\left(\lambda-2\lambda-2\mu\right)}{\left(\lambda+\mu\right)\left(\lambda+2\mu\right)}=-\frac{3\mu K\alpha\left(T-T_0\right)}{\left(\lambda+\mu\right)}. \qquad (18)$$

4. Решение в пластической области

В некоторый момент на линии $x=s$ выполняется условие $\sigma_y=-2k\left(x\right)+\dfrac{3}{2}ce_y^p$. Зарождается упругопластическая граница $r=n_1(t)$. В области пластического течения $n_1(t)\le r\le s$ начинают расти деформации e_x^p, e_y^p, e_z^p, которые являются необратимыми.

Из ассоциированного закона пластического течения следует, что

$$e_x^p=e_z^p,\ e_y^p=-2e_x^p. \qquad (19)$$

Закон Дюамеля — Неймана запишется в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left(\lambda+2\mu\right)\left(e_x-e_x^p\right)+\lambda\left(e_z+e_x^p\right)-3K\alpha\left(T-T_o\right)=0 \\ \sigma_y &= \left(\lambda+2\mu\right)(2e_x^p)+\lambda\left(e_x+e_z+2e_x^p\right)-3K\alpha\left(T-T_o\right)=-2k\left(x\right)+\frac{3}{2}ce_y^p \\ \sigma_z &= \left(\lambda+2\mu\right)\left(e_z-e_x^p\right)+\lambda\left(e_x+e_x^p\right)-3K\alpha\left(T-T_o\right)=0 \end{aligned}. \qquad (20)$$

Решая данную систему уравнений, получим:

$$e_x^p=-\frac{\left(\lambda+\mu\right)}{3K\mu}k(x)+\frac{1}{2}\alpha\left(T-T_0\right). \qquad (21)$$

Из уравнения равновесия следует $\sigma_x=0$. Используя (19) разрешим (20):

$$\sigma_x = 0$$
$$\sigma_y = -2k\left(x\right) - \frac{c\left(\lambda+\mu\right)}{\frac{1}{2}c\left(\lambda+\mu\right)+3K\mu}k\left(x\right) - \frac{3c}{\frac{3c\left(\lambda+\mu\right)}{3K\mu}+2}\alpha\left(T-T_0\right). \quad (22)$$
$$\sigma_z = 0$$

5. Разгрузка

Когда нагрев платины прекращается, в области пластического течения необратимые деформации замедляют свой рост и на линии $x = s$ образуется упругопластическая граница $r = m_1(t)$.

В области разгрузки $m_1(t) \le r \le s$ необратимые деформации $e_x^p(r,t)$, $e_y^p(r,t)$, $e_z^p(r,t)$, ранее зависящие от местоположения и времени, перейдут в необратимые деформации, зависящие исключительно от местоположения $p_x(r)$, $p_y(r)$, $p_z(r)$. Закон Дюамеля — Неймана принимает вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \left(\lambda+2\mu\right)\left(e_x - p_x\right) + \lambda\left(e_z + p_z - p_y\right) - 3K\alpha\left(T-T_o\right) = 0\\
\sigma_y &= \left(\lambda+2\mu\right)(-p_y) + \lambda\left(e_x + e_z - p_z - p_x\right) - 3K\alpha\left(T-T_o\right) \quad .\\
\sigma_z &= \left(\lambda+2\mu\right)\left(e_z - p_z\right) + \lambda\left(e_x - p_x - p_y\right) - 3K\alpha\left(T-T_o\right) = 0
\end{aligned} \quad (23)$$

Решая систему (23), находим единственное ненулевое напряжение:

$$\sigma_y = -\frac{\mu\left(3K\alpha\left(T-T_0\right)+3\lambda\mu p_y + 2\mu^2 p_y\right)}{\lambda+\mu} = -\frac{3\mu K\alpha\left(T-T_0\right)}{\lambda+\mu} - \frac{\mu p_y\left(3\lambda+2\mu\right)}{\lambda+\mu}. \quad (24)$$

Преобразуем выражение $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ к виду $3K = 3\lambda + 2\mu$ и упростим (24)

$$\sigma_y = -\frac{3K\mu p_y}{\lambda+\mu} - \frac{3K\mu\alpha\left(T-T_0\right)}{\lambda+\mu} \quad (25)$$

6. Повторное пластическое течение

Если максимальная температура нагрева была значительной, ее скорости хватило для образования необратимых деформаций, достаточных для появления повторного пластического течения. Повторное пластическое течение зарождается на линии $x = s$; здесь начинает выполняться условие $\sigma_y = 2k(x) - ce_y^p$ и зарождается упругопластическая граница $r = n_2(t)$.

В области повторного пластического течения необратимая деформация имеет вид:

$$p_i = p_i + e_i^p. \quad (26)$$

В области повторного пластического течения $n_2(t) \le r \le s$ используя (26), преобразуем систему (23). Получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \left(\lambda+2\mu\right)\left(e_x - e_x^p - p_x\right) + \lambda\left(e_z - e_z^p - e_y^p + p_z - p_y\right) - 3K\alpha\left(T-T_o\right) = 0\\
\sigma_y &= \left(\lambda+2\mu\right)(-p_y - e_y^p) + \lambda\left(e_x + e_z - e_x^p - e_z^p - p_z - p_x\right) - 3K\alpha\left(T-T_o\right) = 2k(x) - \frac{3}{2}ce_y^p\\
\sigma_z &= \left(\lambda+2\mu\right)\left(e_z - e_z^p - p_z\right) + \lambda\left(e_x - e_x^p - e_y^p - p_x - p_y\right) - 3K\alpha\left(T-T_o\right) = 0
\end{aligned} \quad (27)$$

Решая систему (27), получим:

$$e_x^p = \frac{3K\alpha\mu\left(T-T_0\right)+3\lambda p_y-\lambda\frac{3}{2}cp_y+2\mu^2 p_y-\mu\frac{3}{2}cp_y+2k\mu+2k\lambda}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)} = \\ = \frac{\lambda+\mu}{3K\mu}k+\frac{1}{2}\alpha\left(T-T_0\right)-p_x+\frac{3cp_x\left(\lambda+\mu\right)}{3K\mu}. \quad (28)$$

7. Остаточные напряжения

Рост необратимых деформаций прекращается при полном остывании пластины. Материал пластины деформируется снова обратимо. В области повторного пластического течения необратимая деформация $p_y = p_y + e_y^p$.

Единственное ненулевое напряжение будет находиться из соотношения

$$\sigma_y = -\frac{3K\mu p_y}{\lambda+\mu}. \quad (29)$$

Заключение

В данной статье решалась задача об определении напряженно-деформируемого состояния упрочняющейся упругопластической пластины при локальном нагреве. В результате написания статьи были получены напряжения в упругой и пластической областях, а также пластические деформации в упругой и пластической областях.

При занулении параметра упрочнения получим решение, которое совпадает с результатами полученными Щербатюк Галиной Анатольевной в диссертации «Условие максимальных приведенных напряжений в качестве средства расчетов одномерных неустановившихся температурных напряжений в упругопластических цилиндрических телах» [9].

Литература

1. *Абашкин Е. Е.* Условие пластичности максимальных приведенных касательных напряжений в качестве средства расчетов эволюции плоских напряженных состояний / Е. Е. Абашкин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Серия: Науки о природе и технике. – 2018. – № II-1(34). – С. 51–62.

2. *Абашкин Е. Е.* Комбинированное тепловое воздействие в качестве средства получения сварного соединения с повышенными прочностными свойствами / Комсомольск-на-Амуре, 2019.

3. *Абрамов В. В.* Напряжение и деформация при термической обработке стали / В. В. Абрамов. – Донецк : Вища шк., 1985. – 133 с.

4. *Буренин А. А.* Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия / А. А. Буренин, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Известия Российской академии наук. Серия: Механика твердого тела. – 2014. – С. 124–131.

5. *Ишлинский А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.

6. *Ивлев Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

7. *Ковалев А. В., Спорыхин А. Н.* О двухосном растяжении пластины с отверстием // Информационные технологии и системы МАИ. Вып. 2. Воронеж. – 1998. – С. 61 – 66.

8. *Ковалев А. В., Спорыхин А. Н., Гоцев Д. В.* Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов // Журнал «Прикладная механика и техническая физика», СО РАН. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 146–151.
9. *Щербатюк Г. А., Буренин А. А.* Условие максимальных приведенных напряжений в качестве средства расчетов одномерных неустановившихся температурных напряжений в упругопластических цилиндрических телах. – Комсомольск-на-Амуре, 2018.

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

А. Д. Чернышов[1], О. Ю. Никифорова[1], В. В. Горяйнов[2], С. Ф. Кузнецов[1]

[1]*Воронежский государственный университет инженерных технологий*
[2]*Воронежский государственный технический университет*

Аннотация. Приведена постановка задачи о нахождении прогибов прямоугольной пластины на упругом основании с произвольными граничными условиями и произвольной нагрузкой. Аналитическое решение представляется универсальным быстрым разложением, которое удобно применять в случаях присутствия в задачах производных как четного, так и нечетного порядков Сформулирован принцип получения условий совместности входных данных на границах прямоугольника, невыполнение которых приводит к большим неустранимым погрешностям в его углах.
Ключевые слова: бигармоническое уравнение, прогиб пластины, условия совместности граничных условий, быстрые разложения.

Введение

Для решения бигармонического уравнения применяются различные численные и аналитические методы. В работах [1–4] используется метод итераций. В [5] применяется комбинация метода конечных разностей и метода граничных элементов. В работах [6, 7] решение ищется в виде ряда Фурье, для которого не обсуждаются вопросы его сходимости и возможности почленного дифференцирования. В данной работе для аналитического решения бигармонического уравнения будут использованы быстрые разложения [8, 9], которые ранее с успехом применялись для решения краевых задач уравнений в частных производных [10–13].

Постановка задачи и описание особенностей ее решения

Уравнения равновесия для прямоугольной пластины на упругом основании с произвольными граничными условиями и произвольной нагрузкой запишем в виде неоднородного линейного бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+K_0 w=q\left(x,y\right),\ \left(x,y\right)\in\Omega_{\square}\left(x\in\left[-a,a\right],y\in\left[-b,b\right]\right). \tag{1}$$

Упругое основание пластины в уравнении (1) учитывается слагаемым $K_0 w,$ величина $q(x,y)$ — переменная поперечная нагрузка на поверхность пластины, w — вертикальное перемещение пластины. На боковых границах $\Gamma_{\square}$ зададим $w(x,y)$ и нормальные к её границе $\Gamma_{\square}$ производные от перемещения

$$\begin{gathered} w\big|_{x=-a}=\varphi_1\left(y\right),\ w\big|_{y=-b}=\varphi_2\left(x\right),\ w\big|_{x=a}=\varphi_3\left(y\right),\ w\big|_{y=b}=\varphi_4\left(x\right),\\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=-a}=\psi_1\left(y\right),\ \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=-b}=\psi_2\left(x\right),\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a}=\psi_3\left(y\right),\ \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b}=\psi_4\left(x\right),\\ \left(q\left(x,y\right),\ w,\ \varphi_i,\ \psi_i,\ i=1\div 4\right)\in C^{(8)}\left(\Omega_{\square}\right),\ \left(x,y\right)\in\Omega_{\square}. \end{gathered} \tag{2}$$

Граничные условия (2) означают, что на $\Gamma_{\square}$ задано вертикальное смещение материальных точек пластины и упругий поворот краев пластины. Подобные задачи особенно сложны из-за присутствия в них производных как четного, так и нечетного порядков. Поэтому для решения задачи (1), (2) будем использовать универсальные быстрые разложения [9], которые удобно применять в подобных задачах. В данном случае бигармоническое уравнение содержит четные производные, граничные условия — нечетные производные. Для построения решения будем использовать граничную функцию $M_6(x,y)$ шестого порядка, т. е. не ниже четвертого порядка, так как ДУ (1) имеет четвертый порядок.

Быстрое разложение для $w(x,y)$ запишем в виде суммы граничной функции $M_6(x,y)$ с частичной суммой ряда Фурье

$$w(x,y)=M_6(x,y)+a_0(y)+\sum_{m=1}^{N}\left(a_m(y)\cos m\pi\frac{x}{a}+b_m(y)\sin m\pi\frac{x}{a}\right). \tag{3}$$

В (3) N — количество членов в ряде Фурье, функция $M_6(x,y)$ имеет вид

$$M_6(x,y)=\sum_{q=0}^{6}A_q(y)P_q(x), \tag{4}$$

где $A_q(y)$ некоторые функции от переменной y, $P_q(x)$ специального вида полиномы от переменой x [9]

$$\begin{gathered}P_0(x)=\frac{x}{2a},\ P_1(x)=\frac{x^2}{4a},\ P_2(x)=\frac{x^3}{12a}-\frac{ax}{12},\ P_3(x)=\frac{x^4}{48a}-\frac{ax^2}{24},\ P_4(x)=\frac{x^5}{240a}-\frac{ax^3}{72}+\frac{7a^3x}{720},\\ P_5(x)=\frac{x^6}{1440a}-\frac{ax^4}{288}+\frac{7a^3x^2}{1440},\ \ P_6(x)=\frac{1}{1440}\left(\frac{x^7}{7a}-ax^5+\frac{7a^3x^3}{3}-\frac{31a^5x}{21}\right).\end{gathered} \tag{5}$$

В (3) коэффициенты a_0, a_m, b_m вычисляются интегральными формулами Фурье по переменной x. Функции $A_q(y)$ находятся из выражения [9]

$$A_q(y)=w^{(q)}(a,y)-w^{(q)}(-a,y),\quad q=0\div 6. \tag{6}$$

Равенство (6) удобно использовать, когда производные $w^{(q)}(\pm a,y)$ на концах отрезка $[-a,a]$ известны, т. е. когда $w(x,y)$ известная функция, либо $A_q(y)$ находится из граничных условий, либо из ДУ равновесия пластины. Формула (6) может быть модифицирована к более совершенному виду

$$A_q(y)=w^{(q)}\big(a(1-\varepsilon),y\big)-w^{(q)}\big(-a(1-\varepsilon),y\big),\quad q=0\div 6. \tag{7}$$

где ε — малая величина, которую следует задавать произвольно, но меньше погрешности используемых физических величин, определяемых концепцией сплошности среды.

Разложение (3) позволяет свести задачу с двумя переменными (x,y) к задаче о нахождении коэффициентов $A_q(y)$, $a_0(y)$, $a_m(y)$, $b_m(y)$ с одной переменной y. Входными данными задачи являются постоянные a, b и функции из граничных условий:

$$\varphi_i,\ \psi_i,\ i=1\div 4. \tag{8}$$

При рассмотрении многомерных задач, когда неизвестное перемещение $w(x,y)$ зависит от многих переменных, для получения аналитического гладкого решения возникает проблема согласования входных данных (8) задачи (1), (2). Условия согласований записываются из следующих соображений.

Граница односвязной области $\Omega_\square$ имеет четыре особые точки – углы прямоугольника, где терпят разрыв проекции вектора нормали к $\Gamma_\square$. Решение задачи (1), (2) будем строить из класса гладких функций $C^{(8)}(\Omega_\square)$. В дальнейшем понадобится вычисление производных 8-го порядка, т. е. на 2 выше порядка используемой граничной функции. Тогда в углах $\Omega_\square$ должны выполняться: *условия непрерывности перемещений, непрерывности производных от перемещений и их вторых смешанных производных. Это означает, что при подходе к углу с разных направлений надо получать одинаковые значения указанных величин подобно тому, как получаются условия Коши — Римана в ТФКП. Условия непрерывности будем называть условиями совместности входных данных, т.е. граничных условий. Если же решение допускает разрывы,* *то должно быть какое-либо обоснование физического характера для этих разрывов, но тогда прямое применение рядов Фурье будет проблематичным.*

При подходе к углу с разных направлений надо получить одинаковые значения указанных величин (8). При этом в условиях совместности должны присутствовать только входные данные (8). Этот принцип использован для получении всех ниже приведенных условий совместности.

Из условий непрерывности перемещений получаем первые четыре условия совместности граничных условий

$$\begin{gathered} w(-a,-b)=\varphi_1(-b)=\varphi_2(-a), \quad w(a,-b)=\varphi_2(a)=\varphi_3(-b), \\ w(a,b)=\varphi_3(b)=\varphi_4(a), \quad w(-a,b)=\varphi_4(-a)=\varphi_1(b). \end{gathered} \tag{9}$$

Кроме (9) в угловых точках должны выполняться условия непрерывности вторых смешанных производных

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right|_{x=-a,y=-b}=\psi_1'(-b)=\psi_2'(-a), \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right|_{x=a,y=-b}=\psi_3'(-b)=\psi_2'(a), \\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right|_{x=a,y=b}=\psi_3'(b)=\psi_4'(a), \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right|_{x=-a,y=b}=\psi_1'(b)=\psi_4'(-a). \end{gathered} \tag{10}$$

Штрихом в (10) обозначены производные по той переменной, от которой зависит соответственная функция.

К условиям совместности (9) и (10) добавим условия, связывающие производные от функций для перемещений, заданных в (2), с функциями для производных по нормали к границе $\Gamma_{\square}$ от перемещений из (2), т. е.

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x=-a,y=-b}=\left.\frac{d\varphi_1(y)}{dy}\right|_{y=-b}=\psi_2(-a), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x=a,y=-b}=\left.\frac{d\varphi_3(y)}{dy}\right|_{y=-b}=\psi_2(a), \\ \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x=a,y=b}=\left.\frac{d\varphi_3(y)}{dy}\right|_{y=b}=\psi_4(a), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x=-a,y=b}=\left.\frac{d\varphi_1(y)}{dy}\right|_{y=b}=\psi_4(-a), \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=-a,y=-b}=\left.\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right|_{x=-a}=\psi_1(-b), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a,y=-b}=\left.\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right|_{x=a}=\psi_3(-b), \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a,y=b}=\left.\frac{d\varphi_4(y)}{dy}\right|_{y=b}=\psi_3(b), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=-a,y=b}=\left.\frac{d\varphi_4(x)}{dx}\right|_{y=b}=\psi_1(b). \end{gathered} \tag{11}$$

Равенства (9)–(11) будем называть условиями совместности граничных условий. Если же хотя бы одно из условий (9)–(11) не выполняется, то в углах будем иметь разрывы и тогда нельзя будет дифференцировать ряды Фурье для разрывных функций, т. е. нельзя их будет подставлять в дифференциальное уравнение равновесия упругой пластины (1).

Заключение

Таким образом, при построении гладкого решения нельзя задавать входные данные (8) задачи (1), (2) произвольно, они должны удовлетворять условиям их совместности, что позволит строить решение с высокой точностью в пространстве гладких функций $C^{(8)}(\Omega_{\square})$, и тогда возможно применение рядов Фурье. Критерием существования невыполненных условий совместности является большая неустранимая погрешность в угловых точках.

Литература

1. *Quang A. D.* Iterative method for solving the second boundary value problem for biharmonic-type equation / A. D. Quang, N. Van Thien // Journal of Applied Mathematics. – 2012. – Т. 2012. – P. 891519.

2. *Павлов С. П.* Итерационная процедура сведения бигармонического уравнения к уравнению типа Пуассона / С. П. Павлов, М. В. Жигалов // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. – Т. 1, № 1 (52). – С. 22–29.

3. *Ермоленко А. В.* К решению неоднородного бигармонического уравнения / А. В. Ермоленко, Н. В. Кожагельдиев // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 3 (44). – С. 64–78.

4. *Сорокин С. Б.* Переобусловливание при численном решении задачи Дирихле для бигармонического уравнения / С. Б. Сорокин // Сиб. журн. вычисл. Математики. – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 205–213.

5. *Nekrasova N. N.* Foundation slabs bending model with variable stiffness ratio rested on elastic foundation / N. N. Nekrasova, L. V. Akchurina // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Engineering and Computational Mechanics. – 2019. – Т. 172, № 2. – P. 70–78.

6. *Федосеев В. Н.* Прогиб тонкой прямоугольной пластины со свободными краями при сосредоточенных воздействиях / В. Н. Федосеев, Д. А. Ягнятинский // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 4. – С. 653–659

7. *Тимошенко С. П.* Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука. – 1966. – 636 с.

8. *Чернышов А. Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений / А. Д. Чернышов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 1. – С. 13–24.

9. *Chernyshov A. D.* Universal fast expansion for solving nonlinear problems / A. D. Chernyshov, D. S. Saiko, E. N. Kovaleva // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – P. 012147.

10. Исследование контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий / А. Д. Чернышов, В. М. Попов, В. В. Горяйнов, О. В. Лешонков // Инженерно-физический журнал. – 2017. – Т. 90, № 5. – С. 1288–1297.

11. Решение задачи о контактном тепловом сопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / А. Д. Чернышов, В. М. Попов, А. С. Шахов, В. В. Горяйнов, А. П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4, № 12. – С. 544–552.

12. *Чернышов А. Д.* Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы / А. Д. Чернышов, А. Н. Марченко, В. В. Горяйнов // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4, № 11. – С. 482–486.

13. Повышенная точность решения задачи о контактном термосопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / В. М. Попов, А. С. Шахов, В. В. Горяйнов, О. А. Чернышов, А. П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2014. – Т. 6, № 4. – С. 179–191.

УДК 539.3

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О ПЛИТЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВКЛЮЧЕНИЕ, МЕТОДОМ РЕГРЕССИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А. Ю. Яковлев, Р. М. Землянухин

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния толстой упругопластической плиты с эллиптическим отверстием и упругим включением под действием растягивающих нагрузок. Предложен метод построения регрессионной модели на основе гауссовских процессов, позволяющий прогнозировать распределение напряжений в пластине. Для верификации модели применена математическая модель плиты и выполнено сравнение результатов с помощью компьютерного эксперимента. Полученные результаты демонстрируют высокую точность регрессионного моделирования при ограниченном объеме данных, что открывает возможности для практического применения в инженерных расчетах.

Ключевые слова: упругопластическая плита, эллиптическое отверстие, упругое включение, напряженно-деформированное состояние, метод возмущений, регрессионное моделирование, гауссовские процессы, апостериорное распределение, ковариационная функция, инженерные расчеты, прогнозирование напряжений, математическое моделирование.

Введение

Определению напряженно-деформированного состояния в толстых пластинах с отверстиями и включениями посвящены работы многих авторов [1, 2]. Для решения этой проблемы активно применялся метод возмущений с учетом соответствующих допущений. Развитие электронно-вычислительной техники привело к появлению различного оборудования, с помощью которого можно выводить эксперименты по определению силовых характеристик реальных объектов. Так, например, появились доступные и высокоточные датчики для определения напряжений, а деформации можно определять, применяя камеры высокого разрешения. Таким образом, возникла возможность получения качественной информации о соответствующей величине. При этом в последние десятилетия существенный прогресс возник в методах машинного обучения, в частности нелинейном регрессионном моделировании. Методы регрессионного моделирования активно применяются при решении задач мехатроники и робототехники.

Перечисленные аспекты легли в основу данной работы по построению регрессионной модели напряженного состояния толстой плиты с отверстием и включением методом гауссовских процессов. В качестве источника данных для регрессионной модели выступила математическая модель толстой упругопластической плиты со включением [1, 2].

1. Упругопластическая задача о плите, содержащей включение

Рассмотрим математическую модель двухосного растяжения толстой плиты с отверстием в форме эллипса, в которое с натягом вставлено упругое включение — цилиндр. Материал плиты предполагается идеально упругопластическим, включение предполагается упругим (рис. 1).

Внутренний и внешний контуры включения имеют эллиптическую форму. Плита на бесконечности растягивается взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностями P_1 и P_2, внутренний контур включения нагружен нормальным давлением P_0.

При этом материал конструкции считается не сжимаемым, однородным, изотропным, материалы плиты и включения предполагаются различными. При построении математической

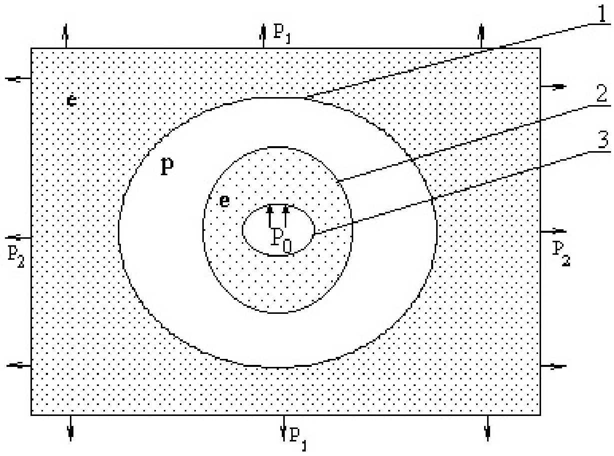


Рис. 1. 1 — граница раздела упругой и пластических областей плиты, 2 — граница контакта включения и плиты, 3 — внутренний контур включения

модели исходили из предположения, что пластическая зона в плите полностью охватывает контур отверстия.

В результате решения задачи получено распределения поля напряжений (компонент тензора напряжений σ_{ij}) и перемещений (компонент вектора перемещений u_i) во всей составной конструкции, а также формы упругопластической границы в плите.

В качестве метода использован приближенно — аналитический метод — метод малого параметра или более широко – метод возмущений. Известно [3], что применение этого метода позволяет получить приближенное решение вблизи уже известного точного решения. Для рассматриваемой задачи с эллиптическими контурами, такой близкой задачей будет задача о плите с круговыми контурами, представляющая нулевое приближение или невозмущенное состояние в искомом решении. Ограничившись нулевым и первым приближениями, решение общей задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 + \delta\sigma_\rho^1; \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \delta\sigma_\theta^1;\\
&\tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}^0 + \delta\tau_{\rho\theta}^1; \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta);\\
&u = u^0 + \delta u^1; \qquad \upsilon = \upsilon^0 + \delta\upsilon^1; \qquad \rho_k = R_0 + \delta R_1,\\
&r_s = 1 + \delta r_s^{(1)},
\end{aligned} \tag{1}$$

где верхний индекс 1 указывает на первое приближение, а индекс 0 на нулевое приближение, δ — малый параметр, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; u, υ — перемещения вдоль осей соответственно; r_s — радиус упругопластической границы в плите, ρ_k — линия контакта включения и плиты.

Соотношения в цилиндрической системе координат ρ, θ, z, определяющие форму контуров отверстий, форму упругопластической границы в плиты, а также полей напряжений и перемещений приведены в [1].

2. Описание метода построения регрессионной модели

Для решения задачи будем применять метод регрессионного моделирования с помощью гауссовских процессов. В этом случае предполагается, что данные $D = \{X = [\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n]^T, Y[y_1, ..., y_n]^T\}$ были сформированы в соответствии с правилом $y_i = h(x_i) + \varepsilon_i$, где $h : R^{\,D} \to R$, $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ — независимый гауссовский шум измерения. Функцию h рассматривают как случайную функцию и выводят апостериорное распределение

$p(h|D)$ по h из априорного распределения $p(h)$, данных D и предположений о гладкости h [4]. Апостериорное распределение используется при прогнозировании значений функции $h(\mathbf{x}_*)$ для произвольных входных данных $x_* \in R^D$.

Вектор состояния системы имеет вид $\mathbf{x} = [\rho, \theta]^T \in R^2$ [1] и представляет собой вектор независимых параметров. Соответствующий зависимый параметр, согласно цели прогнозирования, выбран как $y = \sigma_\rho \in R$ [1].

Для определения апостериорного распределения для случайной функции h, используем метод байесовского вывода в рамках гауссовских процессов (ГП) [4]. Байесовский вывод можно считать трехэтапной процедурой: во-первых, необходимо указать априорное значение распределения для неизвестной функции h. Во-вторых, провести наблюдение и фиксацию данных D. В-третьих, вычислить апостериорное распределение по h, которое уточняет априорное значение путем включения доказательств из наблюдений D. Функция априорного среднего выбирается тождественно равная нулю, а ковариационная функция имеет вид [4]

$$k_h = k_{SE} + \delta_{pq}\sigma_\varepsilon^2,$$

$$k_{SE}\left(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q\right) = \alpha^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q\right)^T \Lambda^{-1}\left(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q\right)\right), \ \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q \in R^D, \quad (2)$$

здесь α^2 дисперсия сигнала функции h, диагональная матрица $\Lambda = diag([l_1^2, ..., l_D^2])$ зависит от характерных масштабов длины l_i, δ_{pq} — символ Кронекера [4]. Величины масштабов длины $l_1, ..., l_D$, дисперсия сигнала α^2 и дисперсия шума σ_ε^2 называются гиперпараметрами скрытой функции h, которые собираются в векторе гиперпараметров $\boldsymbol{\theta}$.

После проведения измерения значений функции h для входных значений обучающего набора данных, получаем набор данных, состоящий из n входных векторов $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ и соответствующих целевых значений $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)^T$. Далее вычисляем гиперпараметры методом максимизации логарифма функции правдоподобия. Логарифм функции правдоподобия в этом случае имеет вид

$$\log p\left(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{y}^T\left(\mathbf{K}_{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\log\left|\mathbf{K}_{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}\right| - \frac{D}{2}\log(2\pi), \quad (3)$$

где $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} k_h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}) & . & . & k_h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta}) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ k_h(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}) & . & . & k_h(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$, $\mathbf{I}$ — единичная матрица размером $n \times n$.

Используя выражение (3), находим вектор оптимальных, для имеющегося набора данных, гиперпараметров $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \arg\max \log p\left(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}\right)$.

Согласно определению ГП следует, что значения функции для некоторых тестовых и обучающих входных данных являются совместно гауссовыми, то есть [4]

$$p\left(\mathbf{h}, \mathbf{h}_*|\mathbf{X}, \mathbf{X}_*\right) = N\left(\begin{bmatrix} m_h(\mathbf{X}) \\ m_h(\mathbf{X}_*) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_*) \\ \mathbf{K}_{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_*) & \mathbf{K}_* \end{bmatrix}\right), \quad (4)$$

где $\mathbf{h} = [h(\mathbf{x_1}), ..., h(\mathbf{x_n})]^T$, $\mathbf{h}_* = [h(\mathbf{x}_{*\mathbf{1}}), ..., h(\mathbf{x}_{*\mathbf{n}})]^T$, $\mathbf{n}$ — количество обучающих векторов данных, m – количество тестовых векторов для прогнозирования.

Рассмотрим случай прогнозирования значения функции $h(\mathbf{x}_*)$, $h: R^D \to R$, при неопределенном тестовом входе $\mathbf{x}_* \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \in R^D$, $y_* \in R$, где h есть ГП с функцией ковариации k_h (2) плюс функция ковариации шума. С учетом (2) среднее значение μ_* прогнозируемого распределения имеет вид [4]

$$\mu_* = \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{q}, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{K} + \sigma_\varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{y}$,

$$\mathbf{q}=\left[q_1,...,q_n\right]^T\in R^n,\ q_i=\alpha^2\left|\mathbf{\Sigma}\Lambda^{-1}+\mathbf{I}\right|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu}\right)^T\left(\mathbf{\Sigma}+\Lambda\right)^{-1}\left(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu}\right)\right),$$

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix} k_h\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1\right) & . & . & k_h\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_n\right) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ k_h\left(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_1\right) & . & . & k_h\left(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_n\right) \end{pmatrix}.$$

3. Описание алгоритма построение регрессионной модели

Рассмотрим алгоритм построения регрессионной модели напряженного состояния толстой плиты со включением под действием растягивающих нагрузок гауссовским процессом в рамках трехэтапной Байесовской процедуры [4].

1. Используя математическую модель толстой плиты со включением, формируем набор кортежей данных, которые состоят из входных значений — координат $(\rho,\theta)^T$ и соответствующих целевых значений радиальных напряжений σ_ρ. Априорное распределение задается выражением (2).

3. Для сформированного набора данных, вычисляем гиперпараметры (3), путем определения экстремума логарифма правдоподобия (3) методом BFGS [4].

4. Вычисляем апостериорного распределение значений моделируемой функции, используя соотношение (4), (5) для некоторого тестового входного значения, заданного математическим ожиданием $\boldsymbol{\mu}_*=[\mu_\rho,\mu_\theta]$ и ковариационной функцией $\mathbf{\Sigma}$.

4. Результаты моделирования

Для компьютерного эксперимента разработана программа на языке C++ в среде Processing [5], которая реализует приведенный выше алгоритм с визуализацией процессов. Программа состоит из восьми модулей и имеет размер 123Кб. Среди основных модулей можно выделить модули:

GP.pde реализует функцию логарифма правдоподобия (3), функцию вычисления прогнозного значения по соотношению (5) для входных значений, заданных математическим ожиданием и ковариационной функцией;

Unit.pde реализует функцию нелинейного поиска максимума у соотношения (3) методом BFGS [4];

Matrix.pde содержит обширный набор функций по работе с матрицами;

Model_EP.pde реализует математическую модель толстой плиты со включением и позволяет определять напряженно-деформированное состояние в зависимости от геометрии включения и внешних нагрузок.

На рис. 2 приведен результат работы программы при моделировании распределения поля напряжений (напряжение). На левой панели представлен результат математического моделирования и точки на плите для обучающего набора, на правой панели результат регрессионного моделирования на основе набора из 43-х точек.

На рис. 3 представлен график распределения напряжения в плите в зависимости от радиуса ρ и при соответствующих значениях угла θ.

В качестве вывода можно отметить высокую степень точности моделирования при сравнительно небольшом объеме обучающих данных. Результаты, полученные в работе, можно использовать для построения регрессионной модели реальной пластины с отверстием, находящейся под действием внешних нагрузок. Для получения данных можно использовать оп-

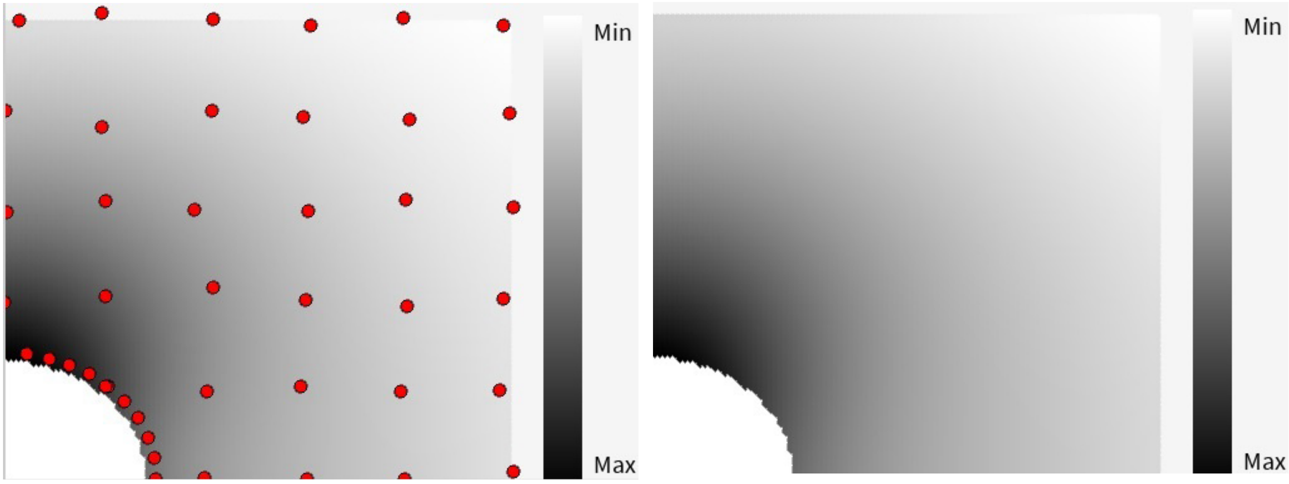


Рис. 2. Слева результат математического моделирования распределения поля напряжений в плите, красными маркерами отмечены точки, где производились измерения напряжения для создания обучающего набора данных. Справа результат соответствующего регрессионного моделирования

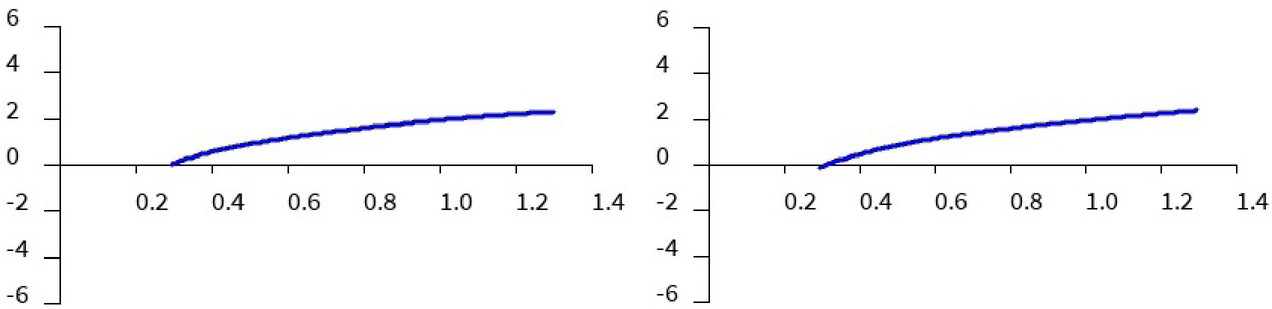


Рис. 3. Слева результат математического моделирования напряжения в плите в зависимости от радиуса ρ и при значении угла θ = 26 градусов. Справа результат соответствующего регрессионного моделирования

тический метод измерения деформаций. Регрессионная модель позволит проводить анализ распределения соответствующих характеристик по пластине, исследовать на устойчивость плиты, применяя аналитические методы.

Заключение

В работе построена регрессионная модель толстой упругопластической плиты с включением. Модель позволяет прогнозировать распределение напряжений в зависимости от геометрии включения и условий нагружения. Полученные результаты могут быть использованы для анализа прочности и устойчивости толстых упругопластических пластин с отверстиями и включениями в инженерной практике.

Литература

1. *Спорыхин А. Н.* Теория и практика решения неодномерных задач упругопластического деформирования / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, А. Ю. Яковлев. – Воронеж, 2003.

2. *Ивлев Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

3. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М. : Мир, 1967. – 310 с.

4. *Deisenroth M. P.* Efficient Reinforcement Learning using Gaussian Processes. KIT Scinticfic Publishing, 2011.

5. Processing : официальный сайт. URL: https://processing.org